Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer | WS 1997/1998 (1. Teil) | SS 1998 (2. Teil)

Bogen 14: Übungen am 14. April 1998

Abgabetermin: am 21. April 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 14: Wegen Karfreitag keine Vorlesung. Die Kapitel 4.5 (Gauß-Quadratur) und 4.6 (Integration singulärer Funktionen) sollten selbständig durchgearbeitet werden.

Präsenzaufgaben: Wir machen einige Vorübungen zu den linearen Gleichungssystemen.

Aufgabe P40. Sei

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ mit gegebenem } n \in \mathbb{N} \tag{14.1}$$

eine Abbildung, also $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^{\mathrm{T}}$ und $f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für $j = 1, 2, \ldots, n$. Wir betrachten für eine gegebene *rechte Seite* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ das Gleichungssystem

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \tag{14.2}$$

Geben Sie Beispiele für (14.2) für $n = 1$ und $n = 2$ an. Wann ist F *linear*? Wann kann man (14.2) als *homogen* bezeichnen?

Aufgabe P41. Sei das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \tag{14.3}$$

gegeben. Bei gegebenen $\mathbf{A}, \mathbf{b}$ sind also alle $\mathbf{x}$ gesucht, für die (14.3) zutrifft. Nennen Sie Lösungskriterien und Aussagen über die Lösungsmenge.

Aufgabe P42. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem (14.3) für $m = n = 2$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned} \tag{14.4}$$

Unter welchen Bedingungen hat (14.4) genau eine Lösung, überhaupt Lösungen, keine Lösung.

Hausaufgaben:

Aufgabe 27. Auf der Basis der Gauß-Zweipunkte-Formel ((4.48) im Buch, 2.Aufl.) entwickele man in Analogie zum Programm 4.17 (aus dem Buch, S. 96) ein adaptives Integrationsprogramm (Pascal-Programm). Man teste es an den Beispielen

$$\sin(\frac{\pi}{2}x), \quad \sqrt{x}, \quad \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \in [0, 1].$$

Wieviele Funktionsauswertungen sind erforderlich um jeweils eine absolute Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-4}$ zu erzielen? Gibt es Grenzen der Anwendbarkeit? Zum Vergleich berechne man jedesmal das exakte Integral.

Aufgabe 28. Zeigen Sie: Es gibt bei beliebigem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ (mit mindestens zwei Punkten) keine Gewichtsfunktion w auf I, so daß die Monome $1, x, x^2, \ldots$ bezüglich w orthogonal sind.