Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

Bogen 13: Übungen am 7. April 1998

Abgabetermin: am 14. April 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 13: (letzte Vorlesung im Wintersemester) Numerische Integration, Gauß-Formeln, Bestimmung der Knoten und Gewichte, Wahl der Gewichtsfunktion bei Integranden mit Singularitäten (bis S. 111, nicht durchgenommene Teile bitte nachlesen).

Präsenzaufgaben: Wir wiederholen numerische Integration.

Aufgabe P37. (a) Wie gewinnt man Formeln, (b) welche kennen Sie, (c) durch welche Maßnahmen kann man einfache Formeln verbessern.

Aufgabe P38. (a) Was ist Konvergenz, (b) wie kann man konvergente Formeln erkennen.

Aufgabe P39. (a) Erklären Sie Extrapolation von Quadraturformeln, (b) Adaption, (c) Gaußsche Formeln, (d) wie integriert man singuläre Funktionen, nennen Sie dazu verschiedene Möglichkeiten.

Hausaufgaben:

Aufgabe 25. Die auf $[-1,1]$ definierten und zum Gewicht $w=1$ gehörenden orthogonalen Polynome heißen *Legendre-Polynome*. Sie werden mit $P_j, j=0,1,\dots$ bezeichnet und sind durch die Normierung $P_j(1)=1$ eindeutig bestimmt. Sie genügen der *Dreitermrekursion*

$$(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x),\; n=0,1,\dots,\; P_{-1}=0,\; P_0=1. \tag{13.1}$$

(a) Man berechne alle P_n für $n\le 5$,
(b) man berechne die Höchstkoeffizienten für alle P_n.
(c) Seien P_j^* die auf $[0,1]$ zum Gewicht $w=1$ gehörenden orthogonalen Polynome. Man leite eine Dreitermrekursion für diese Polynome her.

Aufgabe 26. Entwickeln Sie eine Gauß-Formel zur Integration von

$$I(f):=\int_0^1\frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}},\quad f\in \mathrm{C}[0,1]. \tag{13.2}$$

Gesucht sind (a) die Knoten, (b) die Gewichte und (c) die Dreitermrekursion für die entsprechenden orthogonalen Polynome. Hinweis: Führen Sie alle gesuchten Größen auf Legendre Polynome zurück. Man betrachte dazu das Skalarprodukt $< P_{2j}, P_{2k} >$ mit den Legendre-Polynomen P_{2n} und ersetze in der definierenden Gleichung für das Skalarprodukt x durch $\sqrt{y}$.