Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 12: Übungen am 3. Februar 1998

Abgabetermin: am 7. April 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 12: Numerische Integration, Konvergenz von Quadraturformeln, Extrapolation i. a. und Anwendung auf numerische Integration (Romberg-Formeln), Gauß-Quadratur bis Satz 4.20 (Nullstellen der orthogonalen Polynome), S. 99 unten

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P34. (a) Was heißt Konvergenz von Quadraturformeln? (b) Wie erkennt man konvergente Quadraturformeln? (c) Nennen Sie konvergente Quadraturformeln. (d) Welcher entscheidender Satz wurde zum Beweis benutzt?

Aufgabe P35. (a) Was ist das Ziel der Gaußschen Quadratur? (b) Sind die resultierenden Formeln interpolatorisch?

Aufgabe P36. Man berechne in $[0,1]$ zur Gewichtsfunktion $\gamma(x) := 1$ orthogonale Polynome $p_j \in \Pi_j$, $j = 1, 2$ mit (a) $p_1 \perp \Pi_0$, (b) $p_2 \perp \Pi_1$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 23. Wir behandeln die Mittelpunktsformel (4.19), (Buch, 2. Aufl., S. 90)

$$I_L^M(f) := h \sum_{\ell=1}^{L} f(x_\ell), \quad x_\ell := a + h(\ell - \frac{1}{2}), \quad h := (b-a)/L, \quad L \in \mathbb{N} \tag{12.1}$$

zur angenäherten Integration von $I(f) := \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Wir setzen voraus, daß eine Entwicklung des Fehlers $\varepsilon_L(f) := I(f) - I_L^M(f)$ in der Form

$$\varepsilon_L(f) = c_1 h^{k_1} + c_2 h^{k_2} + \cdots \text{ mit } k_j = 2j \ (j \in \mathbb{N}) \tag{12.2}$$

und h wie in (12.1) existiert. (a) Bestimmen Sie die durch Extrapolation entstehende neue Formel

$$\tilde{I}_{2L}^M(f) := \frac{4I_{2L}^M(f) - I_L^M(f)}{3} \tag{12.3}$$

für $L = 1$. Untersuchen Sie die entstehenden Gewichte auf ihre Vorzeichen. Zeigen Sie, daß (b) diese Formel interpolatorisch ist, (c) sie die Ordnung Vier hat, (d) und geben Sie eine Fehlerabschätzung für diese Formel an. Wir definieren aus der Mittelpunktsformel (12.1) durch Extrapolation

$$I_{\ell,j} := \frac{2^{k_j} I_{\ell+1,j-1} - I_{\ell,j-1}}{2^{k_j} - 1}, \quad I_{\ell,0} := I_{2^\ell}^M(f), \quad j := 1, 2, \ldots, m, \quad \ell := 0, 1, \ldots, m-j. \tag{12.4}$$

(e) Zeigen Sie, daß die Formeln $I_{0,j}$ für $j \geq 2$ nicht interpolatorisch sind. Hinweis: Man vergleiche die Ordnung mit der Anzahl der verwendeten Knoten.

Aufgabe 24. (a) Integrieren Sie mit Hilfe eines Pascal-Programms die drei Funktionen

$$f_1(x) := 1/(x+1), \quad f_2(x) := \sqrt{x}, \quad f_3(x) := 1/\sqrt{x}, \quad x \in [0,1]$$

mit den Formeln (12.4), wobei in allen Fällen die entscheidenden Exponenten $k_1, k_2, \ldots$ aus Formel (12.2) durch die experimentelle Fehlerordnung $\alpha_{\ell,j}, j := 0, 1, \ldots, m-1$, $\ell := 0, 1, \ldots, m-j-1$ zu schätzen sind, Formel (3.46) im Buch, S. 54. (b) Wieviele Funktionauswertungen werden benötigt um acht richtige Dezimalstellen zu erhalten. (c) Berechnen Sie zum Vergleich mit schulmathematischen Methoden die exakten Integrale $I(f_j)$, $j = 1, 2, 3$ aus. Abzugeben sind neben einem Aufgabentext für jede Funktion eine Tabelle mit den Werten $I_{\ell,j}$, $\alpha_{\ell,j}$ und das wie immer gut kommentierte Pascal-Programm.