Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 11: Übungen am 27. Januar 1998

Abgabetermin: am 3. Februar 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 11: Numerische Integration, Ordnung einer Formel, interpolatorische Formeln, Newton-Cotes-Formeln, Beispiele für Formeln mit wenigen Knoten: Mittelpunktsregel, Trapezregel, Simpsons Regel, zusammengesetzte Formeln, Fehlerabschätzungen, Vorüberlegungen zur Konvergenz von Quadraturformeln

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P31. Schreiben Sie die allgemeinen aus Interpolation gewonnenen Quadraturformeln hin.

Aufgabe P32. Seien $x_0, x_1 \in [a, b]$ zwei beliebige, aber verschiedene Punkte und $a < b$. Bestimmen Sie die Trapezregel für diesen Fall. Die über $[a, b]$ zu integrierende Funktion f ist also bei der Integration durch ein lineares Polynom p, das an den beiden Knoten x_0, x_1 die Funktion f interpoliert, zu ersetzen. Wie lautet die Formel, wenn die beiden Knoten zusammenfallen? Welche Ordnung haben die entstehenden Formeln. Leiten Sie für die vorkommenden Fälle eine Fehlerabschätzung her.

Aufgabe P33. Wie könnte man Splines zur numerischen Integration benutzen?

Hausaufgaben:

Aufgabe 21. Seien unendlich viele Knoten t_j mit $t_j < t_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, die sich nirgends häufen, gegeben. Wir betrachten lineare, stetige Splines $l_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $j \in \mathbb{Z}$, definiert durch

$$(11.1) \qquad l_j(x) := \begin{cases} \dfrac{x - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} & \text{für } x \in [t_{j-1}, t_j[, \\ \dfrac{x - t_{j+1}}{t_j - t_{j+1}} & \text{für } x \in [t_j, t_{j+1}], \\ 0 & \text{für } x \notin [t_{j-1}, t_{j+1}]. \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß die Splines $l_j, l_{j+1}, \ldots, l_{j+n}$ auf dem Gitter $a = t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+n} = b$ mit $n \geq 1$ (bei festem j) linear unabängig sind, und daß daher $\dim \mathbb{S}_2 = n + 1$ gilt. Zeigen Sie dazu, daß $l_j(t_k) = \delta_{jk}$, und daß daher das lineare Interpolationsproblem $s(t_k) = f_k$, $k = j, j + 1, \ldots, j + n$ in $\mathbb{S}_2$ bei vorgegebenen f_k durch $s(x) = \sum_{k=j}^{j+n} f_k l_k(x)$ eindeutig gelöst werden kann.

Aufgabe 22. Für kubische Splines s auf einem Gitter $\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$ ist $s \in \mathrm{C}^2[a, b]$ möglich. Den Vektorraum dieser Splines hatten wir mit $\mathbb{S}_4$ bezeichnet. Unter $R_j \in \Pi_3$ verstehen wir die Restriktion von s auf das Teilintervall $]t_j, t_{j+1}[$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Die im Buch, (2. Aufl., S. 60) angegebene Berechnungsmethode geht von unbekannten $s_j := s'(t_j)$ aus, und die Forderung $s \in \mathrm{C}^2[a, b]$ liefert dann ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung dieser Unbekannten und damit zur Berechnung von s (Formeln (3.68)) in der Newtonschen Form.

Wir fassen jetzt die Größen $M_j := s''(t_j)$, $j = 0, 1, \ldots, n$ als Unbekannte auf. Leiten Sie aus den Gleichungen (3.68) und mit den Bezeichnungen (3.53) die Gleichungen

$$\Delta t_j M_j + 2(\Delta t_j + \Delta t_{j+1}) M_{j+1} + \Delta_{j+1} M_{j+2} = 6(\frac{\Delta f_{j+1}}{\Delta t_{j+1}} - \frac{\Delta f_j}{\Delta t_j}), \quad j = 0, 1, \ldots, n - 2$$

für die Unbekannten M_j her. Wie berechnen Sie daraus den Spline s in der Newtonschen Form

$$(3.67) \qquad R_j(x) = a_j + b_j(x - t_j) + c_j(x - t_j)^2 + d_j(x - t_j)^2(x - t_{j+1}),\ j = 0, 1, \ldots, n - 1.$$

Es sind also aus den M_j Formeln für die a_j, b_j, c_j, d_j zu entwickeln.