Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

Bogen 10: Übungen am 20. Januar 1998

Abgabetermin: am 27. Januar 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 10: Splines, insbesondere interpolierende lineare und kubische Splines (Vorlesung von B. Werner)

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P28. (a) Was ist ein Spline. (b) Was ist die Ordnung eines Splines. (c) Welche Struktur hat die Menge aller Splines bis zur Ordnung k.

Aufgabe P29. (a) Was versteht man unter einem interpolierenden Spline? (b) Wie werden lineare, interpolierende Splines berechnet, und (c) wie kann man den Fehler dieser Splines abschätzen.

Aufgabe P30. Der Raum $\mathbb{S}_2$ der linearen Splines in $[a, b]$ sei durch die Splineknoten

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b$$

gegeben. Sei $f \in \mathrm{C}[a, b]$ gegeben. (a) Kann man sich einen stetigen Spline $s \in \mathbb{S}_2$ mit $s(m_j) = f(m_j)$ und $m_j = (t_j + t_{j+1})/2$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$ vorstellen. (b) Wenn ja, wie wird er berechnet? (c) Ist er eindeutig bestimmt? (d) Ist dieser Spline interpolierend im Sinne von Aufgabe P 29?

Hausaufgaben:

Aufgabe 19. Man berechne den interpolierenden, linearen und den interpolierenden *lokalen*, kubischen Spline s in einem äquidistanten Gitter der Maschenweite $h = 2^{-k}(b - a)$, $k = 0, 1, \ldots, 8$ für die folgenden sechs Funktionen f definiert auf $[a, b]$:

(a) $f(x) = 1 - \operatorname{sign} x x^5, \quad x \in [0, 1];$

(b) $f(x) = \exp(-x^2), \quad x \in [0, b],\ b \in \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2\}.$

Man schreibe zur Ausführung ein Pascal-Programm und gebe (neben dem kommentierten Programm) eine Tabelle mit dem tatsächlichen Fehler $\varepsilon(h)$ und der beobachteten Fehlerordnung $\alpha(h)$ in Abhängigkeit von h ab. Der tatsächliche Fehler ist

$$\varepsilon(h) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - s(x)|,$$

und die beobachtete Fehlerordnung ist

$$\alpha(h) = \frac{\log(\varepsilon(h)\varepsilon(h/2))}{\log(2)}.$$

Unter dem lokalen, kubischen Spline versteht man den Spline, der aus Formel (3.67) mit den dividierten Differenzen nach Tabelle (3.37) (Buch, 2. Aufl. S. 60) intervallweise berechnet wird, wobei für die s_j die bekannten Ableitungen $f'(t_j)$ eingesetzt werden.

Aufgabe 20. Man berechne für die Probleme der vorigen Aufgabe die Fehlerabschätzungen mit den Formeln (3.59), (3.70), Buch, S. 58 bzw. S. 61. Es ist offensichtlich

$$\frac{d^n \exp(-x^2)}{dx^n} = P_n \exp(-x^2) \text{ mit } P_n \in \Pi_n.$$

Die Polynome $H_n = (-1)^n P_n$ heißen *Hermite-Polynome*.