Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

Bogen 7: Übungen am 16. Dezember 1997
Abgabetermin: am 6. Januar 1998 vor den Übungen

Inhalt von Woche 7: Interpolationsfehler, Tschebyscheffknoten und -polynome, Buch S. 43 – 46. Die Übungen haben wegen „Streiks“ nicht stattgefunden. Wegen der unregelmäßig vorkommenden Veranstaltungen wird der Abgabetermin für die Aufgaben der Bögen 5 und 6 bis zum 6. Januar 1998 vor den Übungen verlängert. Abgabe beim Veranstalter oder bei den ÜbungshelferInnen natürlich auch vorher möglich. Lesen Sie im Buch den gesamten Abschnitt über Interpolation ohne rationale Interpolation.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P19. Das Polynom $\omega(x) := (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ nennt man *Knotenpolynom*. Werden die Knoten x_j ganzzahlig $x_j = j$, $j = 0, 1, \ldots, n$ gewählt, so ist nach Präsenzaufgabe P16

$$|\omega(0.5)| = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!},$$

d. h. $\max_{x\in[0,n]} |\omega(x)| \ge |\omega(0.5)|$ ist sehr groß. Wie erhält man daraus eine untere Schranke für das Maximimun von $|\omega(x)|$ für ein Knotenpolynom mit beliebigen äquidistanten Knoten $x_j = a + j(b-a)/n$, $j = 0, 1, \ldots, n$ in einem Intervall $[a, b]$. Man diskutiere insbesondere den Fall $[a, b] = [-1, 1]$.

Aufgabe P20. Wie groß sind die Interpolationsfehler von $\sin x$, $x \in [0, \pi/2]$, e^x, $x \in [0, 1]$, $1/x$, $x \in [1, 2]$ bei bis zu drei äquidistanten Knoten.

Aufgabe P21. Man bestimme die ersten fünf Tschebyscheffpolynome $T_0, T_1, \ldots, T_4$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 13. Man berechne arcsin auf $[-1, 1]$ mit Hilfe einer Funktionsprozedur in Pascal mit der Methode der inversen Interpolation. Man experimentiere mit äquidistanten und Tschebyscheffknoten. Man wähle soviele Knoten, daß eine möglichst hohe Genauigkeit ($\le 10^{-2}$) erreicht wird. Hinweis: Man interpoliere tatsächlich nur in $[0, 1]$ und verwende $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. Die Genauigkeit sollte durch $\max_{x\in[0,\pi/2]} |\arcsin \sin x - x|$ überprüft werden. Man kommentiere die Resultate.

Aufgabe 14. Sei p das Newtonpolynom zu äquidistanten Knoten $x_j = x_0 + jh$, $j = 0, 1, \ldots, n$ mit einem beliebigen $h > 0$, das die Daten (x_j, f_j), $j = n, n-1, \ldots, 0$ interpoliert (also rückwärts). Wir definieren

$$\nabla^0 f_j = f_j, \quad \nabla^1 f_j = f_j - f_{j-1}, \quad \nabla^k f_j = \nabla^1(\nabla^{k-1} f_j),\ k \ge 2,\ j \ge k.$$

Diese Größen heißen *Rückwärtsdifferenzen*. Weiter definieren wir für beliebige $x \in \mathbb{R}$

$$\binom{x}{0} = 1, \quad \binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\cdots(x-(j-1))}{1\cdot 2\cdots j}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Man zeige, daß das Newtonpolynom p in die Form

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{-s}{j} \nabla^j f_n \quad \text{mit} \quad s = \frac{x-x_n}{h} \tag{7.1}$$

gebracht werden kann. Beweisen Sie dazu separat, daß mit den üblichen *Binomialkoeffizienten* $\binom{k}{j} = \frac{k(k-1)\cdots(k-(j-1))}{1\cdot 2\cdots j}$ die beiden folgenden Formeln gelten:

$$\nabla^k f_n = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} f_{n-j},\ k = 0, 1, \ldots \qquad f_{n-p} = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \binom{p}{j} \nabla^j f_n,\ p = 0, 1, \ldots \tag{7.2}$$

Schreiben Sie die Formeln in (7.1), (7.2) für alle $n \le 2$ zuerst explizit auf.

Ein schönes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins Neue Jahr wünscht Ihnen Ihr Gerhard Opfer