Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer WS 1997/1998 (1. Teil) SS 1998 (2. Teil)

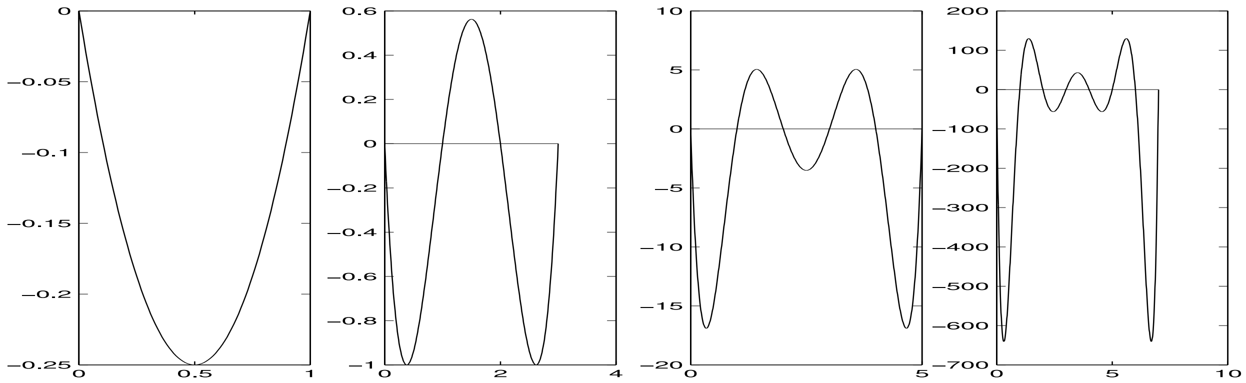
Bogen 6: Übungen am 9. Dezember 1997

Abgabetermin: am 16. Dezember 1997 vor den Übungen

Inhalt von Woche 6: Wegen „Streiks“ keine Vorlesung, die Übungen sind wegen einer Exkursion nach Kopenhagen planmäßig ausgefallen. Lesen Sie die Abschnitte über Interpolation mit gewöhnlichen und trigonometrischen Polynomen und mit Splines.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P16. Das Polynom $\omega(x) := (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ nennt man *Knotenpolynom*. Wie groß ist das Knotenpolynom in der Nähe des Randes, und wie groß ist es in der Mitte. Man nehme dazu $x_j := j$, $j=0,1,\ldots,n$ an bei ungeradem n und berechne $\omega(0.5)$ und $\omega(n/2)$. Man beginne mit kleinen n.



Figur 6.1. Knotenpolynome mit 2,4,6,8 Knoten

Aufgabe P17. Wie gewinnt man die Formeln für die dividierten Differenzen?

Aufgabe P18. Programmieren Sie den Neville-Algorithmus mit einer rekursiven Pascalprozedur.

Hausaufgaben:

Aufgabe 11. Seien

$$x_j = \cos\frac{2(n-j)+1}{2n+2}\,\pi, \quad j=0,1,\ldots,n$$

die *Tschebyscheff-Knoten* in $[-1,1]$. Man zeichne einen oberen Halbkreis mit $[-1,1]$ als Durchmesser und denke sich die Knoten x_j auf dem Durchmesser markiert. Projiziert man x_j nach oben auf die Halbkreislinie, so hat dieser Punkt die Koordinaten $z_j := (x_j, y_j)$ mit einem zunächst unbekannten y_j. Wie lautet die Darstellung von z_j in Polarkoordinaten. Was folgt daraus für die Konstruktion der x_j?

Aufgabe 12. Man schreibe ein Pascal-Programm zur Auswertung des Knotenpolynoms $\omega(x) := (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$ bei beliebiger Knotenwahl mit $x_j \in [-1,1], x_j \neq x_k, j \neq k$ und finde jeweils $\max_{x\in[-1,1]}|\omega(x)|$ und $\arg\max_{x\in[-1,1]}|\omega(x)|$. Die Bezeichnung arg heißt, man finde die Stelle, an der das Maximum angenommen wird. Die Knoten generiere man folgendermaßen: Man starte mit äquidistanten Knoten y_j und finde x_j aus $f(x_j)=y_j, j=0,1,\ldots,n$ mit geeigneten, stetigen, monotonen Funktionen f wie $(a):\ f(x)=x, (b):\ \sin\pi/2x, (c):\ \operatorname{sign} x\sqrt{|x|}, (d):\ \tan\pi/2x$. Man gebe die Ergebnisse in einer Tabelle an für $n=2,3,8,9,16,17$. Man verschwende nicht so viel Energie in die Bestimmung des Maximums. Den Fall (b) kann man bei entsprechender Begründung weglassen.