Numerische Mathematik für StudentInnen
mit Ziel Diplom in Mathematik

Gerhard Opfer — WS 1997/1998 (1. Teil) — SS 1998 (2. Teil)

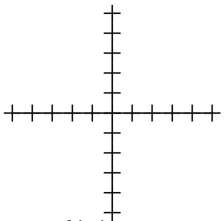
Bogen 3: Übungen am 18. November 1997

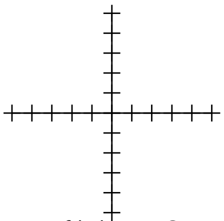
Abgabetermin: am 25. November 1997 vor den Übungen

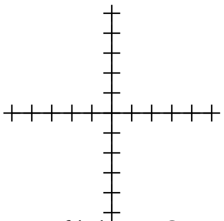
Inhalt von Woche 3: Wiederholung Polynome, trig. Polynome, schnelle Fourier-Transformation (FFT), Buch S. 17 – 22.

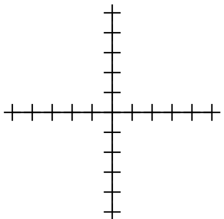
Präsenzaufgaben:

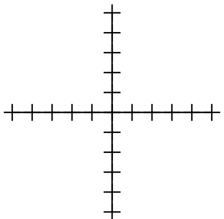
Aufgabe P7. Skizziere Sie möglichst viele Funktionsgraphen von f. Dabei ergibt sich f aus den Bildunterschriften.

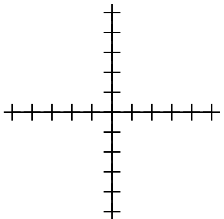

f(x)=x

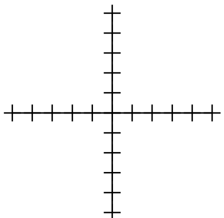

f(x)=x^2

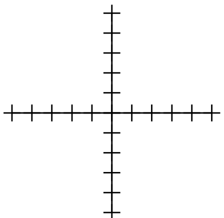

f(x)=x^3

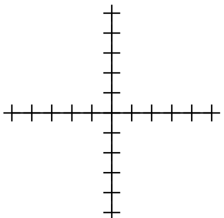

f=sin

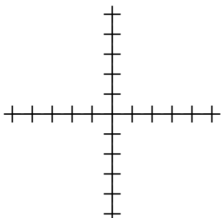

f=cos

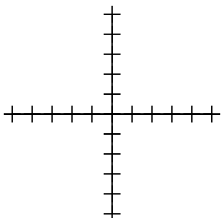

f=tan

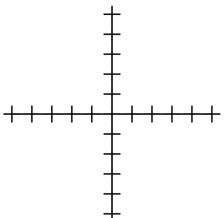

f=sinh


f=cosh


f=tanh


f=exp


f(x)=exp(−x)


f(x)=exp(−x^2)

Aufgabe P8. Sei ein Polynom p in der Form $p(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$ gegeben, und sei ξ ein weiterer gegebener Punkt. Wie berechnen Sie dasselbe p in der Form

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} c_j (x-\xi)^j. \tag{3.1}$$

Gefragt ist also nach der Berechnung der c_j, $j = 0, 1, \ldots, n$. Welche besonderen Eigenschaften hat die in (3.1) angegebene Darstellung. Ist Ihnen ein Name dafür geläufig?

Aufgabe P9. Sei $t_3(x) = 2 + \cos x - \sin x + 2\cos 2x - 4\sin 2x + 3\cos 3x + 2\sin 3x$ und $d_k = t_3(x_k)$ mit $x_k = 2\pi k/3$, $k = 0, 1, 2$. Man berechne die c_j in der äquivalenten Darstellung $d_k = \sum_{j=0}^{2} c_j w_3^{jk}$ mit $w_3 = \exp(2\pi \mathrm{i}/3)$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 5. Sei $d_k = \sum_{j=0}^{N-1} c_j w_N^{jk}$, $k = 0, 1, \ldots, N-1$ mit $w_N = \exp(2\pi \mathrm{i}/\mathrm{N})$ und gegebenen $c_j \in \mathbb{C}$. Unter der Voraussetzung $N = pq$ und $p, q \geq 2$ teile man den Summationsindex j auf in die p Klassen $j \bmod p = 0, 1, \ldots, p-1$ und leite für jede Klasse eine Formel für die Teilsummen her. Auf wieviele Fourier-Transformationen welcher Länge reduziert sich die Rechnung? Man orientiere sich an dem Fall $p = 2$.

Aufgabe 6. Die beiden trigonometrischen Polynome $\cos Nx$, $\sin Nx$, $x \in [0, 2\pi[$ haben jeweils genau $2N$ Nullstellen im angegebenen Intervall. Man zeige, daß jedes trigonometrische Polynom t_N vom Grad N höchstens $2N$ Nullstellen in dem angegebenen Intervall hat. Schneidet ein trigonometrisches Polynom $y = t(x)$ eine Gerade $y = \mathrm{const}$ an $2N$ Schnittpunkten, was kann man dann schließen?