Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 12 (Schluß): Ausgabetermin: am 24. Januar 2000

Abgabetermin: am 31. Januar 2000 vor den Übungen

Der folgende Text enthält einige Ergänzungen zur Vorlesung.
Definition 12.1. Eine Folge $\{x_j\}$ in einem Hilbert-Raum H heißt **Bessel-Folge**, wenn

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left| < x, x_j > \right|^2 < \infty \quad \text{für alle } x \in H, \tag{12.1}$$

sie heißt eine **Riesz-Fischer-Folge**, wenn das **Momentenproblem**

$$< x, x_j >= c_j, \quad j \in \mathbb{N} \tag{12.2}$$

bei gegebenem $\{c_j\} \in \ell_2$ mindestens eine Lösung $x \in H$ besitzt. Ist $\{x_j\}$ eine beliebige Folge in H, so heißt die Menge aller Zahlenfolgen $< x, x_j >$, $x \in H$ **Momentenraum** von $\{x_j\}$. Der Momentenraum einer Bessel-Folge liegt also in ℓ_2, während der Momentenraum einer Riesz-Fischer-Folge den ℓ_2 umfaßt.
Satz 12.2. (i) Ist $\{x_j\}$ eine Bessel-Folge, so existiert eine Konstante M mit

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \left| < x, x_j > \right|^2 \leq M \|x\|^2 \quad \text{für alle } x \in H. \tag{12.3}$$

(ii) Ist $\{x_j\}$ eine Riesz-Fischer-Folge, dann gibt es eine Konstante m so, daß bei gegebenem $\{c_j\} \in \ell_2$ die Gleichungen (12.2) eine Lösung x besitzen mit

$$\|x\|^2 \leq \frac{1}{m} \sum_{j \in \mathbb{N}} |c_j|^2. \tag{12.4}$$

Die im vorigen Satz vorkommenden Konstanten M, m heißen **Schranken** der Bessel- bzw. Riesz-Fischer-Folge.
Satz 12.3. (i) Die Folge $\{x_j\}$ ist genau dann eine Bessel-Folge mit Schranke M, wenn

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\|^2 \leq M \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \tag{12.5}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $c_1, c_1, \ldots, c_n$. (ii) Die Folge $\{x_j\}$ ist genau dann eine Riesz-Fischer-Folge mit Schranke m, wenn

$$m \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\|^2 \tag{12.6}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $c_1, c_1, \ldots, c_n$.
Ist also $\{x_j\}$ simultan eine Bessel- und Riesz-Fischer Folge, so gilt

$$m \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\|^2 \leq M \sum_{j=1}^{n} |c_j|^2 \tag{12.7}$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $c_1, c_1, \ldots, c_n$.

b. w.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P34. Was möchte man mit einem *Urwavelet* ψ bewirken? Können Sie sich auch ein zweidimensionales Urwavelet vorstellen? Welche Eigenschaften sollte es haben?

Aufgabe P35. Das Urwavelet ψ, das als Haarwavelet bezeichnet wird und definiert ist durch

$$\psi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ -1 & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0 & \text{für } x \in \complement[0,1] \end{cases} \tag{12.7}$$

hat die Eigenschaft, eine orthonormale Folge ψ_{jk} in $\mathscr{L}_2$ zu erzeugen. Wie muß man die Numerierung dieser Folge verstehen, und was müssen Sie zur Orthonormalität beweisen? Wie sehen die individuellen ψ_{jk} aus?

Aufgabe P36. Versuchen wir es mal mit

$$\psi(x) := \begin{cases} 2x & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ 2(1-x) & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0 & \text{für } x \in \complement[0,1] \end{cases} \tag{12.8}$$

(=max$(0, 1-2|x-1/2|)$). Wie sehen die entsprechenden ψ_{jk} aus. Bilden sie eine orthonormale Folge?

Hausaufgaben:

Aufgabe 23. Sei ψ das in (12.7) definierte Haarsche Urwavelet. Zeigen Sie, daß die daraus abgeleiteten Funktionen $\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ eine orthonormale Folge definieren. Was muß man zeigen, um nachzuweisen, daß diese Folge eine Basis des $\mathscr{L}_2(\mathbb{R})$ bildet.

Von den folgenden Aufgaben wähle man eine aus.

Aufgabe 24. Seien $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ vollständige, biorthogonale Folgen in einem Hilbert-Raum H. Man zeige: $\{x_j\}$ ist genau dann eine Bessel-Folge, wenn $\{y_j\}$ eine Riesz-Fischer-Folge ist. Inwiefern wird die Vollständigkeit gebraucht?

Aufgabe 25. Sei $\{x_j\}$ eine Folge in einem Hilbert-Raum H. Man zeige: Diese Folge ist genau dann eine Riesz-Fischer-Folge, wenn für alle Eigenwerte λ aller endlichen Matrizen $A_n = (< x_j, x_k >)_{j,k=1}^n$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $|\lambda| \geq \varepsilon$.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Einige weitere Eigenschaften von Basen in einem Banachraum, insbesondere: Ist X ein Banachraum mit Basis, so kann man eine Basis in einer dichten Teilmenge von X finden. Anwendung: In $\mathrm{C}[a,b]$ gibt es polynomiale Basen. Hinweis: die Monome $1, x, x^2, \ldots,$ bilden keine Basis, und das Auffinden von polynomialen Basen ist nicht so einfach.
Beginn mit Wavelets, definiert durch ein einziges *Urwavelet* $\psi \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$ mit zwei fundamentalen Eigenschaften: (i) Es erzeugt eine in $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$ orthonormale Folge $\psi_{jk}(x) := 2^{jn/2}\psi(2^j x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^n$, definiert durch $< \psi_{jk}, \psi_{lm} >= \delta_{jl}\delta_{km}$. In einer etwas allgemeineren Theorie wird die *Skalierung* 2^j durch $\mathbf{A}^j$ mit einer geeigneten, nichtsingulären Matrix $\mathbf{A}$ ersetzt. (ii) Die durch ψ definierte Transformation

$$W_\psi(f)(a,b) := |a|^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\overline{\psi\big(\frac{t-b}{a}\big)}\,\mathrm{d}t, \quad f \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n),\ a > 0,\ b \in \mathbb{R}^n \tag{12.9}$$

ist in der Lage, wesentliche Informationen von f ans Tageslicht zu befördern. Definition des *Mittelwerts* μ und der *Varianz* σ^2 von Funktionen $f \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R})$, für die auch $tf(t), t^2 f(t) \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R})$ durch

$$\mu(f) := \frac{1}{||f||}\int_{\mathbb{R}} tf(t)\,\mathrm{d}t, \quad \sigma^2(f) := \frac{1}{||f||}\int_{\mathbb{R}} (t-\mu(f))^2 f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{12.10}$$

Man sagt auch, daß f im Zeitintervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$ *lokalisiert* ist. Im Regelfall werden allerdings meistens $\mu(|f|^2)$, $\sigma(|f|^2)$ zum Messen des Zeitintervalls verwendet. Daß das Zeitintervall und das entsprechende Intervall im Frequenzbereich nicht simultan klein werden können, ist Inhalt der Unschärferelation. Gabor-Transformationen

$$\mathscr{G}_b^\alpha(f)(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} f(t) g_\alpha(t-b)\,\mathrm{d}t$$

sind ein erster Versuch, in die Fourier-Transformation eine Lokalisierung (ein *Fenster*) einzubauen. Die im Integral auftauchende Funktion g_α ist im Regelfall eine Glockenkurve mit Mittelwert Null und Varianz α.

(version of 23. 1. 2000 at 1278 minutes since midnight)