Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 11 : Ausgabetermin: am 17. Januar 2000
Abgabetermin: am 24. Januar 2000 vor den Übungen

Ein Hilbert-Raum $(H, < \quad , \quad >)$, dessen Elemente Funktionen $f : S \to \mathbb{K}$ sind, heißt ein **Hilbertscher Funktionenraum**, wenn die **Auswertefunktionale** $f \to f(x)$ für alle $x \in S$ stetig sind. In diesem Fall gibt es nach einem Darstellungssatz von Riesz zu jedem $x \in S$ ein $K_x \in H$ mit

$$f(x) = < f, K_x > \tag{11.1}$$

(variabel ist hier f, nicht x!) Die Abbildung $K : S \times S \to \mathbb{K}$ definiert durch

$$K(x, y) := < K_y, K_x > = K_y(x) \tag{11.2}$$

heißt **reproduzierender Kern** oder **Kernfunktion** von H. Ist $\{b_j\}$, $j \in \mathbb{N}$ eine orthonormale Basis von H, so ist

$$K(x, y) = \sum_{j \in \mathbb{N}} b_j(x)\overline{b_j(y)}. \tag{11.3}$$

Die Definition der Biorthogonalität (s. u.) kann leicht auf Banachräume X übertragen werden, wenn man für $\{y_j\}$ Elemente des Dualraumes X^* einsetzt. In diesem Fall ist also $< x_j, y_k > = y_k(x_j)$ zu definieren.
Definition 11.4. Sei $\{x_j\}$ eine Folge in einem Banachraum X. Wir betrachten zu jedem $k \in \mathbb{N}$ die Teilfolge $\mathbf{y}_k = \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots\}$. Unter M_k verstehen wir den Abschluß des von $\mathbf{y}_k$ aufgespannten Raumes. Ist $x_k \notin M_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so heißt die Folge $\{x_j\}$ **minimal**.
Zur Erinnerung: In einem Hilbertraum heißt die Folge $\{x_j\}$ **vollständig**, wenn

$$< x_j, x > = 0 \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \Rightarrow x = 0.$$

Man kann folgende Sätze beweisen:
Satz 11.5. In einem Hilbertraum existiert zu einer gegebenen Folge $\{x_j\}$ genau dann eine biorthogonale Folge $\{y_j\}$ wenn $\{x_j\}$ minimal ist. Sie ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn $\{x_j\}$ vollständig ist.
Satz 11.6. In einem Hilbertraum haben äquivalente Basen äquivalente biorthogonale Folgen.
Bemerkung 11.7. Fast alle Basen in Hilbert-Räumen sind Riesz-Basen. Man vgl. dazu die Bemerkung in Young [1980, p.36].

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P31. Der Raum $\mathbf{H}^2$ (benannt nach Hardy) besteht aus allen auf $\mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$ holomorphen Funktionen $f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$, deren Taylor-Koeffizienten zu ℓ_2 gehören, also $\sum_{j=0}^{\infty} |c_j|^2 < \infty$. Das Skalarprodukt von $f = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j$ und $g = \sum_{j=0}^{\infty} d_j z^j$ ist auf $\mathbf{H}^2$ definiert durch

$$< f, g > := \sum_{j=0}^{\infty} c_j \overline{d_j}.$$

Zeigen Sie: (a) $f(z) := 1/(1-z) \notin \mathbf{H}^2$, $f(z) := \log(1-z) \in \mathbf{H}^2$, (b) $\mathbf{H}^2$ ist ein Hilbertscher Funktionenraum, (c) berechnen Sie den Kern von $\mathbf{H}^2$.

Aufgabe P32. Was ist eine Riesz-Basis, und wie kann man sie von anderen Basen unterscheiden.

Aufgabe P33. Was ist Unschärfe. Wie ist ihre physikalische Interpretation?

b. w.

Hausaufgaben:

Aufgabe 21. Sei H der Hilbertraum aller Funktionen $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}zt} \, \mathrm{d}t, \quad \varphi \in L_2[-\pi, \pi] \tag{11.8}$$

mit dem Skalarprodukt

$$< f, g >= \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \, \mathrm{d}x. \tag{11.9}$$

Man zeige (a), daß H ein Hilbertscher Funktionenraum ist und (b), man finde die Kernfunktion.
Hinweis: Der Raum H heißt **Paley-Wiener-Raum** und wird meistens mit **P** abgekürzt. Die in (11.8) angegebene Abbildung $\varphi \to f$ ist für ganze Funktionen f mit höchstens exponentiellem Wachstum (i. e. $|f(z)| \leq A\mathrm{e}^{B|z|}$, $z \in \mathbb{C}$) ein Isomorphismus zwischen **P** und $L_2[-\pi, \pi]$ (Satz von Paley-Wiener).

Aufgabe 22. Man berechne bei beliebigem $\omega_0 \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ die Unschärfe von

$$\psi(x) := \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x} & \text{für } |x| \leq a, \\ 0 & \text{für } |x| > a. \end{cases}$$

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: (genauer: der letzten zwei bis drei Vorlesungen) **Koeffizientenfunktionale** bei gegebener Basis $\{x_j\}$ in einem Banachraum X, Stetigkeit dieser Funktionale $f_j(x) := c_j$ bei $x = \sum_{j \in \mathbb{N}} c_j x_j$, und Abschätzung der Form $1 \leq ||x_j|| \, ||f_j|| \leq M$ mit einer Konstanten (i. e. nicht von j abhängig) M, Definition von **vollständigen Folgen** $\{x_j\}$ in normierten Räumen X, wenn die lineare Hülle $\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ dicht in X liegt, ist $x^* \in X^*$ (also ein lineares, stetiges Funktional auf X), so ist $\{x_j\}$ genau dann vollständig, wenn aus $x^*(x_j) = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$ folgt, daß $x^* = 0$, Charakterisierung von Basen in einem Banachraum als vollständige Folge $\{x_j\}$ mit $|| \sum_{j=1}^{m} c_j x_j || \leq M || \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ||$ mit einer einheitlichen Konstanten M und beliebigen Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_n$ und $m \leq n$, (nicht in der Vorlesung gezeigt: in einem reflexiven Banachraum X bilden die zu einer Basis definierten Koeffizientenfunktionale $\{f_j\}$ eine Basis vom Dualraum X^*), **biorthogonale Folgen** $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ in einem Hilbertraum: $< x_j, y_k >= \delta_{jk}$, **Äquivalenz von Basen** $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ in einem Banachraum: für jede Zahlenfolge $\{c_j\}$ sind die beiden Reihen $\sum_{j \in \mathbb{N}} c_j x_j$, $\sum_{j \in \mathbb{N}} c_j y_j$ simultan konvergent (nicht notwendig gegen denselben Wert) oder divergent, zwei Basen $\{x_j\}$, $\{y_j\}$ in einem Banachraum sind genau dann äquivalent, wenn es eine lineare, topologische (i. e. bijektive und in beiden Richtungen stetige) Abbildung $T : X \to X$ gibt mit $T(x_j) = y_j$, Definition von **Riesz-Basen** in einem Hilbertraum: äquivalent zu einer orthonormalen Basis, **Unschärferelation** (vorgetragen von Carl Geiger) im allgemeinen und bei Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ im speziellen.