Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 9 und 10: Ausgabetermin: am 13. Dezember 1999
Abgabetermin: am 17. Januar 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P25. Wie kann man zeigen, daß in einem Hilbertraum (separabel oder nicht separabel) immer eine maximale, orthonormale Menge existiert.

Aufgabe P26. In welcher Beziehung stehen Bessels Ungleichung und Parsevals Gleichung?

Aufgabe P27. Gilt Parsevals Gleichung in $\mathbb{C}^n$ mit Skalarprodukt $< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$ und wie lautet sie?

Aufgabe P28. Sei $\{e_j\}$ eine orthonormale Basis in einen Hilbertraum und $\{f_j\}, j \in \mathbb{N}$ eine Folge mit

$$||e_j - f_j|| < 1 \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß auch $\{f_j\}, j \in \mathbb{N}$ eine (nicht notwendig orthonormale) Basis bildet.

Aufgabe P29. Ist eine maximale Menge von linear unabhängigen Vektoren in einem Banachraum eine Basis?

Aufgabe P30. Wir fassen die Elemente x von $\mathbb{C}^n$ als Abbildungen $x : \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$ auf. Handelt es sich um einen Hilbertschen Funktionenraum? Und wie lautet die Kernfunktion?

Hausaufgaben:

Aufgabe 17. Sei $(X, < \ , \ >)$ der Hilbertraum $L_2[-\pi, \pi]$ mit dem Skalarprodukt

(9.1). $$< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

Zeigen Sie (in Anlehnung an die Vorlesung), daß

(9.2) $$e_j(t) := e^{j\mathrm{i}t}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

eine orthonormale Basis von X definiert. Führen Sie alle Schritte ausführlich aus.

Aufgabe 18. Zeigen Sie, daß in $L_2[a, b]$ mit dem Skalarprodukt

(9.3) $$< f, g >:= \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

die Monome $\{1, t, t^2, \ldots\}$ eine (nicht orthogonale) Basis bilden.

Aufgabe 19. Sei $(L_2[0, 1], < \ , \ >)$ der übliche Hilbertraum der quadratintegrierbaren Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $< f, g >:= \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, dt$. Ist dieser Raum ein Hilbertscher Funktionenraum? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 20. Sei $\{e_j\}, j \in \mathbb{N}$ eine orthonormale Menge in einem Hilbertschen Funktionenraum mit Kern K. Zeigen Sie: Diese Menge ist genau dann maximal (bildet also eine Basis), wenn

$$K(x, x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} |e_j(x)|^2.$$

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Elementare Eigenschaften des Skalarprodukts, Charakterisierung einer orthonormalen Basis in einem (separablen) Hilbertraum, insbesondere Bessels Ungleichung, Parsevals Gleichung, Beispiele von Hilberträumen und Basen, $L_2[-\pi, \pi]$, Basis $\exp(\mathrm{i}jt)$, $j \in \mathbb{Z}$, Folgerungen aus Parsevals Gleichung, $\mathbf{H}^2$, (Hardy), $\mathbf{A}^2$, (Flächennorm *Area*), Hilbertsche Funktionenräume, Charakterisierung durch die Stetigkeit der Auswertefunktionale, der reproduzierende Kern.

`(version of 12. 12. 1999 at 1293 minutes since midnight)`