Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 8: Ausgabetermin: am 6. Dezember 1999
Abgabetermin: am 13. Dezember 1999 vor den Übungen

Eine Schauder-Basis $b_0, b_1, \ldots$ für $(X, ||\quad||) = (\mathrm{C}[a,b], ||\quad||_\infty)$ kann folgendermaßen konstruiert werden: Gegeben dichte Knotenfolge $x_0, x_1, \ldots$ in $[a,b]$ mit $x_0 := a, x_1 := b$ und alle Punkte paarweise verschieden. Alle Basiselemente b_j sind stückweise linear und für $j \geq 2$ haben diese Basiselemente die Gestalt von linearen B-Splines, also Hutfunktionen:

$$b_0 := 1; \quad b_1(x) := (x-a)/(b-a).$$

Für $j \geq 2$ zerlegen die Punkte $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}\}$ das Intervall $[a,b]$ in $j-1$ nicht überlappende offene Intervalle. In einem dieser Intervalle liegt x_j. Nennen wir dieses Intervall $I_j :=]x_{jl}, x_{jr}[$. Wir setzen

$$b_j(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin I_j, \\ \dfrac{x - x_{jl}}{x_j - x_{jl}} & \text{für } x \in [x_{jl}, x_j[, \\ \dfrac{x - x_{jr}}{x_j - x_{jr}} & \text{für } x \in [x_j, x_{jr}]. \end{cases}$$

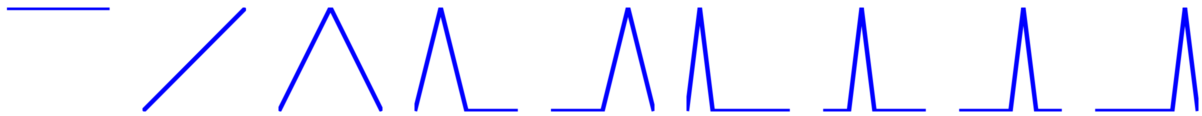
Damit sind die Basiselemente definiert. Ist $f \in \mathrm{C}[a,b]$, so definieren wir als $L_j f$ die Abbildung, die durch den Polygonzug durch die Punkte $(x_k, f(x_k))$, $k := 0, 1, \ldots, j$ beschrieben wird mit $L_0 f := f(x_0)$. Die Entwicklungskoeffizienten α_j in der gesuchten Entwicklung

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j b_j(x)$$

erhalten wir dann aus der Formel

$$\alpha_0 := f(x_0), \quad \alpha_j := (f - L_{j-1} f)(x_j), \; j \geq 1. \tag{8.1}$$

Die ersten Elemente der Schauderbasis zur Knotenfolge $0, 1, 1/2, 1/4, 3/4, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8$ sind in Figur 8.2 abgebildet



Figur 8.2. Schauderbasis bis b_8

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P22. Was sind Hamel-Basen, gibt es Hamel-Basen?

Aufgabe P23. Was sind Schauder-Basen, gibt es Schauder-Basen?

Aufgabe P24. Wie konstruiert man Schauderbasen im $\mathrm{C}[a,b]$ und wie konstruiert man entsprechend Approximationen von stetigen Funktionen auf $[a,b]$. Welche Approximationsgüte kann man erwarten?

Hausaufgaben:

Aufgabe 15. Beweisen Sie die Ungleichung

$$1 + ||x - y|| \geq \frac{1 + ||x||}{1 + ||y||} \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{8.3}$$

und zeigen Sie damit, daß für die Faltung $*$ gilt:

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow \varphi_1 * \varphi_2 \in \mathcal{S}. \tag{8.4}$$

Aufgabe 16. Berechnen Sie für die Knotenfolge $x_0 := 0, x_1 := 1, x_{2^{n-1}+j} := \frac{2j-1}{2^n}, j := 1, 2, \ldots, 2^{n-1}, n := 1, 2, \ldots$ (mindestens) die ersten 17 Terme der Schauder-Basis (also bis b_{16}) für $f := \sqrt{\ }$, exp und berechnen Sie den maximalen Fehler $||f - f_n||_\infty$ der oben beschriebenen Darstellung mit $f_n := \sum_{j=0}^n \alpha_j b_j$. Stellen Sie Graphiken her von allen b_j und von $f - f_n$. Die Benutzung eines Computers ist unvermeidbar. Empfohlen wird die Benutzung der Programmiersprache MATLAB.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Hamel-Basen in einem Vektorraum, Schauder-Basen in einem normierten, separablen Vektorraum, Beispiel C$[a, b]$ mit gleichmäßiger Norm, Schauder-Basen in einem Hilbertraum (Beginn), orthogonale, orthonormale Teilmengen.

(version of 6. 12. 1999 at 988 minutes since midnight)