Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 7: Ausgabetermin: am 29. November 1999

Abgabetermin: am 6. Dezember 1999 vor den Übungen

Wir setzen $\mathcal{D} := \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{E} := \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$, und $\mathcal{S}$ sei der Raum der schnell fallenden Funktionen. Dann ist

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'. \tag{7.1}$$

Die Räume $\mathcal{D}'$, etc sind die linearen, stetigen Funktionale auf $\mathcal{D}$, etc, wobei der Stetigkeitsbegriff aus $\mathcal{D}$, etc übertragen wird. Die Funktionale $d \in \mathcal{D}'$, etc werden immer mit $(d, \varphi) := d(\varphi), \varphi \in \mathcal{D}$, etc bezeichnet. Ist d *regulär*, so hat d die Form $(d, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} d(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, das Funktional d wird also mit der Funktion d, die das Funktional definiert, identifiziert. Die in (7.1), rechte Seite, stehende *Einbettung* ist stetig in dem Sinne, daß $e_k \to 0$ in $\mathcal{E}'$ auch Konvergenz in $\mathcal{S}'$, etc impliziert. Man kann den Isomorphismus zwischen $\mathcal{D}$ und $\mathcal{Z} := \mathcal{F}(\mathcal{D})$, der durch den Satz von Paley-Wiener ausgedrückt wird, fortsetzen auf $\mathcal{D}'$ und $\mathcal{Z}'$. Dadurch kann man über die Taylorsche Formel auch eine Fouriertransformation von $f(x) := \mathrm{e}^{ax}$, $a \in \mathbb{C}^n$ definieren, nämlich

$$\hat{f}(\omega) = (2\pi)^{n/2}\delta(\omega + \mathrm{i}a). \tag{7.2}$$

Zu beachten ist dabei, daß dieses f keine temperierte Distribution ist, also nicht in $\mathcal{S}'$ liegt, aber in $\mathcal{D}'$. So kann man die Fouriertransformation von vielen weiteren Funktionen finden, die aus exp abgeleitet werden.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P19. Wie sind wir zu einer Lösung der Wärmeleitungsgleichung gekommen?

Aufgabe P20. Wenden Sie die Produktformel $\mathcal{F}(fg) = (2\pi)^{-n/2}\hat{f} * \hat{g}$ an auf $x^p = x^{p_1}x^{p_2}$, beginnen Sie mit $x = 1 \cdot x$.

Aufgabe P21. Was bedeutet die Formel (7.2) für $a \in \{\pm\mathrm{i}, \pm 1\}$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 13. Berechnen Sie die Fouriertransformierten von: (a) sin, (b) cos, (c) sinh, (d) cosh, (e) sign, (f) $\sin(x)\chi_{[-\pi,\pi]}(x)$, (g) $\cos(x)\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(x)$, (h) tanh, (i) $\sqrt{1-x^2}\chi_{[-1,1]}(x)$, (j) $1/\sqrt{|x|}$.

Aufgabe 14. Zeigen Sie, daß für $f, g \in \mathcal{S}$ die folgende Gleichung gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{7.3}$$

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Bestimmung einer Fundamentallösung (Grundlösung) γ der Wärmeleitungsgleichung $W(u) := u_t - \Delta u = f$ im Sinne von $W(u)\gamma = \delta$. Formeln in $\mathcal{S}'$:
$\mathcal{F}(D^p f)(\omega) = (\mathrm{i}\omega)^p\hat{f}(\omega)$, $D^p\hat{f} = \mathcal{F}((-\mathrm{i}x)^p f)$, $\mathcal{F}(x^p) = \mathrm{i}^{|p|}(2\pi)^{n/2}D^p\delta$, $\mathcal{F}(D^p\delta) = (2\pi)^{-n/2}(\mathrm{i}\omega)^p$, Satz von Paley-Wiener für Funktionen in $\mathcal{D} := \mathrm{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Wesentlich ist die Aussage, daß in diesem Raum $\hat{f}(\omega)$ auf komplexes ω ausgedehnt werden kann und eine ganze (auf ganz $\mathbb{C}^n$ definierte) holomorphe Funktion beschreibt (i. e. die partiellen Ableitungen, im komplexen Sinn, nach allen Variablen existieren und sind stetig) mit einem Wachstum, das durch $(*)$ $|\omega^p\hat{f}(\omega)| \le C_p\mathrm{e}^{R|\Im\omega|}$ für alle $p \in \mathbb{N}_0^n$ beschränkt ist. Dabei beschreibt R den Radius einer Kugel, die den Träger von f enthält. Die Menge der ganzen Funktionen mit $(*)$ heiße $\mathcal{Z}$. Der Satz von Paley-Wiener sagt dann, daß $\mathcal{F} : \mathcal{D} \to \mathcal{Z}$ ein in beiden Richtungen stetiger Isomorphismus ist. Wesentlich beim Beweis war eine Integralformel aus der Funktionentheorie vom Typ $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f(x+h)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}+h} f(y)\,\mathrm{d}y$ für festes komplexes h und ein Identitätssatz der Funtionentheorie: f, g ganz, $f(z) = g(z), z \in \mathbb{R}^n \Rightarrow f(z) = g(z), z \in \mathbb{C}^n$.

`(version of 28. 11. 1999 at 1222 minutes since midnight)`