Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 6: Ausgabetermin: am 22. November 1999

Abgabetermin: am 29. November 1999 vor den Übungen

Unter $\delta(x-x_0)$ werde das Funktional $(\delta(x-x_0), f) := f(x_0)$ verstanden. Das Funktional $\delta := \delta(x)$ heißt **Diracsche Deltafunktion**. Es gilt die Bezeichnung $Ш_a(x) := \sum_{j\in\mathbb{Z}} \delta(x-ja)$ für $a>0$. Diese Funktion heißt **Diracscher Kamm**. Dieser Kamm hat also unendlich viele, gleichabständige Zinken.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P16. Wie sind $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ definiert? Nennen Sie Elemente in diesen Räumen. Welche Unterscheidung wird für Elemente in $\mathcal{S}'$ getroffen?

Aufgabe P17. Wie definiert man Operationen wie Differentiation, Multiplikation, Fouriertransformation in $\mathcal{S}'$?

Aufgabe P18. Berechnen Sie die Fouriertransformierten von $\delta, 1$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 11. Sei δ die Diracsche Deltafunktion, also $\delta(f) := (\delta, f) := f(0)$ für alle $f \in \mathcal{S}$. (a) Zeigen Sie: $\delta \in \mathcal{S}'$, (b) finden Sie ein (reguläres) $\varphi \in \mathcal{S}'$ mit $\varphi' = \delta$, (c) berechnen Sie die Ableitung von δ, (d) sei

$$h(x) := \max(0, 2-|x|) = \begin{cases} 2+x & \text{für } -2 \le x \le 0, \\ 2-x & \text{für } 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Fassen Sie h als reguläre Distribution auf und berechnen Sie ihre Ableitung.

Aufgabe 12. Berechnen Sie die Fourier-Transformationen der folgenden Funktionen aus $\mathcal{S}'$:
(a) Heaviside-Funktion $f = (\operatorname{sign} + 1)/2$,
(b) Diracscher Kamm $Ш_a(x)$,
(c) Diracscher Zaun $Ш_a(x)\delta(y)$,
(d) Diracsche Mauer $\delta(x-a)$, aufgefaßt als Funktion in (x,y),
(e) Diracsches Nagelbrett $\sum_{j,k\in\mathbb{Z}} \delta(x-ja)\delta(y-ka)$ mit $a>0$.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Fouriertransformationen in $\mathcal{S}$, dem Raum der schnell fallenden Funktionen, der Satz von Plancherel für Funktionen in $\mathcal{S}$, $\mathcal{F}: \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ ist ein Automorphismus, linear, stetig, bijektiv, und dasselbe gilt für die Umkehrung $\bar{\mathcal{F}}$, Umkehrung ist auch eine Fouriertransformation, $\bar{\mathcal{F}}\varphi = \mathcal{F}\varphi^*$ mit $\varphi^*(x) = \varphi(-x)$, Folgerungen: $\mathcal{F}\psi^* = (\mathcal{F}\psi)^*$, $\mathcal{F}\mathcal{F}\psi = \psi^*$, Einführung der Faltung in $\mathcal{S}$, Faltung ist stetige Abbildung $\mathcal{S}\times\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, Formeln für die Faltung: $\widehat{\varphi * \psi} = (2\pi)^{n/2}\hat{\varphi}\hat{\psi}$, $\widehat{\varphi\psi} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\hat{\varphi} * \hat{\psi}$, der Raum $\mathcal{S}'$ der linearen, stetigen Funktionale auf $\mathcal{S}$, dieser heißt auch Raum der temperierten Distributionen, nach einer Fehlübersetzung des englischen Wortes *tempered*. Ist $f \in \mathcal{S}'$ und $\varphi \in \mathcal{S}$, so schreibt man für $f(\varphi)$ in Anlehnung an ein Skalarprodukt auch (f, φ), Unterscheidung zwischen regulären und anderen temperierten Distributionen, Identifizierung der regulären Distribution f mit der sie definierenden Funktion f: $(f,\varphi) := \int f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$, Bedingungen für reguläre Distributionen, Anwendung von gewissen Operationen $\mathcal{OP}$ auf $\mathcal{S}'$ i. w. immer in der Form $(\mathcal{OP}f, \varphi) := (f, \mathcal{OP}\varphi)$, Beispiele: Differentiation, Multiplikation mit einer Funktion, Konvergenz, Fouriertransformation, Anwendungen: Fouriertransformation der Diracschen Delta-Funktion, Fouriertransformation der konstanten Funktion Eins: $\mathcal{F}\delta = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot 1$, $\mathcal{F}1 = (2\pi)^{n/2}\delta$.

(version of 21. 11. 1999 at 1247 minutes since midnight)