Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 5: Ausgabetermin: am 15. November 1999
Abgabetermin: am 22. November 1999 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P13.

Aufgabe P14.

Aufgabe P15.

Hausaufgaben:

Aufgabe 9. Man finde Funktionen f, g mit den folgenden Eigenschaften:

$$f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n),\ f \notin \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n), \quad g \in \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n),\ g \notin \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n). \tag{5.1}$$

Sei $1 \le p < q$. Man modifiziere die gefundenen Funktionen f, g so, daß die entsprechenden Aussagen (5.1) gelten für $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$ statt $\mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und $\mathscr{L}_q(\mathbb{R}^n)$ statt $\mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n)$. Für beschränkte Definitionsbereiche B gilt $f \in \mathscr{L}_q(B) \Rightarrow f \in \mathscr{L}_p(B)$. Mit welcher Ungleichung wird diese Aussage begründet?

Aufgabe 10. Sei p ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom. Wir definieren auf $\mathbb{R}$

$$f(x) = \exp\big(-\frac{1}{|p(x)|}\big) \text{ mit } f(x_0) = 0 \text{ für } p(x_0) = 0. \tag{5.2}$$

Man zeige, daß f auf $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist, und daß$f^{(k)}(x_0) = 0$ für alle x_0 mit $p(x_0) = 0$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Man konstruiere zwei nichttriviale Funktionen $f_1, f_2 \in \mathrm{C}_c^\infty$, die weder durch Translation noch durch Umskalierung auseinander hervorgehen. Hinweis: Man untersuche (5.2) zuerst für den Fall $p(x) = x$.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche:

(version of 7. 11. 1999 at 1241 minutes since midnight)