Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 3: Ausgabetermin: am 1. November 1999
Abgabetermin: am 8. November 1999 vor den Übungen

Für reell- oder komplexwertige Funktionen $\varphi, \phi \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ definieren wir in leichter Abweichung von den Angaben auf Blatt 1 drei Familien von **Fouriertransformationen**

(i) $$\mathcal{F}(\varphi)(\omega) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\omega t}\, dt, \qquad \bar{\mathcal{F}}(\phi)(t) := \int_{\mathbb{R}} \phi(\omega) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}\omega t}\, d\omega,$$

(ii) $$\mathcal{G}(\varphi)(\omega) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt, \qquad \bar{\mathcal{G}}(\phi)(t) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \phi(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, d\omega,$$

(iii) $$\mathcal{H}(\varphi)(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \varphi(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\, dt, \quad \bar{\mathcal{H}}(\phi)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \phi(\omega) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\, d\omega.$$

Wir nennen entsprechend $\bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{H}}$ die **inverse Fouriertransformation** von $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P7. Seien f meßbar, g integrierbar (mit Werten in $\mathbb{K}$) und $|f| \le |g|$ fast überall. Man zeige, daß f integrierbar ist.

Aufgabe P8. Sei $I := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{d}x}{(1+||x||_2)^k}$. Für welche $k \in \mathbb{N}$ existiert I, für welche nicht.

Aufgabe P9. Sei $f \in \mathrm{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$. Man zeige $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = 0$. Folgerung: Sind $f, g \in \mathrm{C}^1(\mathbb{R}^n)$ und f oder $g \in \mathrm{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$, so ist $fg \in \mathrm{C}^1_c(\mathbb{R}^n)$ und $\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial fg}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} g\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial g}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x = 0$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 5. Wir verwenden in dieser Aufgabe die obigen Definitionen (i) bis (iii). Sei $\bar{\mathcal{F}}(\phi)$ invers zu $\mathcal{F}(\varphi)$ mit der Bedeutung $\varphi = \bar{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\varphi))$, $\phi = \mathcal{F}(\bar{\mathcal{F}}(\phi))$. Zeigen Sie, daß dann auch $\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}$, und $\mathcal{H}, \bar{\mathcal{H}}$ invers zueinander sind. Als Anwendung berechnen Sie in allen drei Familien die Fouriertransformierte und ihre Inverse von $f(t) := \exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2})$ unter Benutzung von Aufgaben 2 und 3.

Aufgabe 6. Wie lautet die Fouriertransformierte in der obigen Form (iii) von $\varphi(-t)$, wenn die Fouriertransformierte von φ bereits bekannt ist. Was folgt daraus für gerade Funktionen ($\varphi(-t) = \varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$)? Was folgt daraus für ungerade Funktionen ($\varphi(-t) = -\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$)? Für beliebiges φ sei $\varphi(t) = 0.5(\varphi(t) + \varphi(-t)) + 0.5(\varphi(t) - \varphi(-t)) =: \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$. Ganz offensichtlich ist φ_1 gerade und φ_2 ungerade. Was folgt daraus für $\mathcal{H}(\varphi)$?

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Nullmengen, abzählbar, nicht abzählbar, Beispiel: Sierpiński-Teppich, nicht meßbare Mengen prinzipiell nur mit Auswahlaxiom (oder einer äquivalenten Formulierung) konstruierbar, Stetigkeit und Differenzierbarkeit von parameterabhängigen Integralen, wie z. B. Besselfunktionen, Faltung von Funktionen, Kommutativität der Faltung, Beispiel einer diskreten Faltung: Multiplikation von formalen Potenzreihen, insbesondere Polynomen, Integration rotationssymmetrischer Funktionen $g(x) := f(||x||_2)$, $x \in \mathbb{R}^n$, Die Räume $L_p(\mathbb{R}^n)$, $p \ge 1$ als Banachräume, der $L_2(\mathbb{R}^n)$ als Raum mit Skalarprodukt $< f, g > := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x$, also Hilbertraum. Fouriertransformation für $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$ immer in der Form $\hat{f}(\omega) := \mathcal{F}(f)(\omega) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x$, dabei ist ωx als reelles Skalarprodukt $\omega x := \sum_{j=1}^n \omega_j x_j$ von $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ und $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ aufzufassen, Bilder und Lebenslauf Fouriers, Fouriertransformation von: Glockenkurve, Indikatorfunktion eines Intervalls, Skalierung, Verschiebung, Faltung, partielle Ableitung, besondere Produkte, Anwendung auf $f \in \mathrm{C}^k_c(\mathbb{R}^n)$ = Raum der k-mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, Beschränktheit des Wachstums von $\hat{f}$ in dieser Klasse, Bilder $\hat{f}$ liegen i. a. nicht im $\mathscr{L}_1$.

(version of 2. 11. 1999 at 663 minutes since midnight)