Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 2: Ausgabetermin: am 25. Oktober 1999

Abgabetermin: am 1. November 1999 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P4. Wie definiert man Borelmengen auf $\mathbb{R}$?

Aufgabe P5. Zeigen Sie, daß einpunktige Mengen Nullmengen sind.

Aufgabe P6. Borelmengen über den offenen Mengen in $\mathbb{R}$ und über den Intervallen in $\mathbb{R}$ definieren dasselbe Mengensystem. Wie kann man das einsehen?

Hausaufgaben:

Aufgabe 3. Seien für ein $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ die Größen $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$, $\check{f} = \bar{\mathcal{F}}(f)$ bereits bekannt. Man berechne $\hat{g} = \mathcal{F}(g)$, $\check{g} = \bar{\mathcal{F}}(g)$ für $g(t) = f(at+b)$ für beliebige Konstanten a, b mit $a \neq 0$.

Aufgabe 4. Sei eine Gleichung der Form

$$g(t) := \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{jk} f(2^j t - k) \tag{2.1}$$

für eine Funktion f gegeben. Man wende $\mathcal{F}$ auf diese Gleichung an. Hinweis: Es ist sinnvoll das Ergebnis aus Aufgabe 3 zu verwenden. Bemerkung: Die Multiplikation des Arguments t (in (2.1)) mit einem positiven Faktor nennt man *Skalierung*. Skalierungen und *Verschiebungen* insbesondere um ganzzahlige Größen werden später bei den noch zu behandelnden *Wavelets* eine Rolle spielen.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Vergleich Riemann-Lebesgue Integral einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$.
Riemann-Integral: D ist (im ersten Schritt) ein beschränktes Intervall, Zerlegung des *Definitionsbereichs* D in Teilintervalle der Länge $\leq \delta$ und Ersetzung von f durch geeignete Treppenfunktionen und Approximation des Integrals durch endliche Summen, Definition des Integrals durch Grenzwertbildung $\delta \to 0$. Nachteil: i. a. gilt nicht: $\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$, sogar für stetige f_n.
Lebesgue-Integral (Henri Lebesgue (1902)): Das *Bild* $f(D)$ wird in Teilintervalle zerlegt und dieselbe Idee wie oben wird auf die Mengen $E_j^n := \{t : j/n \leq f(t) < (j+1)/n\} = f^{-1}[j/n, (j+1)/n[$ angewendet: $\int f \approx \sum \frac{j}{n} \lambda(E_j^n)$, Frage nach der *Länge* $\lambda(E_j^n)$ von E_j^n ist zu klären, da i. a. diese Mengen keine Intervalle und keine endlichen Vereinigungen von Intervallen sind.
Definition einer abstrakten Algebra, σ-Algebra über einer Menge T, der Schnitt von σ-Algebren ist wieder eine σ-Algebra, es existiert also kleinste σ-Algebra über $\mathbb{R}$, die alle Teilintervalle von $\mathbb{R}$ enthält, die σ-Algebra der *Borelmengen*, Existenz genau eines σ-additiven, translationsinvarianten *Maßes* λ mit $\lambda([a,b]) = \lambda(]a,b[) = b - a$ für $a < b$, Definition einer meßbaren Abbildung, Indikatorfunktion, Eigenschaften meßbarer Funktionen, insbesondere: der punktweise Limes von meßbaren Funktionen ist meßbar, Übertragung der Meßbarkeit auf komplexwertige Funktionen, Behebung eines Defekts der Nullmengen (nicht alle Teilmengen sind meßbar) durch sog. Vervollständigung des Maßes, Einführung des Integrals für nicht negative Funktionen, Übertragung auf reell- und komplexwertige Funktionen, Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz, Satz von Lebesgue über dominierte (oder majorisierte) Konvergenz, Borelmengen über offenen Mengen im $\mathbb{R}^n$, Integration von Funktionen mehrerer Variabler, Satz von Fubini.