Funktionaltransformationen
insbesondere Fourier- und Wavelettransformationen

Gerhard Opfer WS 1999/2000

Bogen 1: Ausgabetermin: am 18. Oktober 1999

Abgabetermin: am 25. Oktober 1999 vor den Übungen

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Kommt noch nicht vor.

Für reell- oder komplexwertige Funktionen $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ definieren wir

$$\mathcal{F}(f)(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,dt, \tag{1.1}$$

$$\bar{\mathcal{F}}(f)(\omega) := \int_{\mathbb{R}} f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\,dt. \tag{1.2}$$

Dafür schreiben wir auch kurz

$$\hat{f} := \mathcal{F}(f), \quad \check{f} := \bar{\mathcal{F}}(f). \tag{1.3}$$

Diese Definition ist auch sinnvoll für $f \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R}^n)$. Man ersetze dann nur das gewöhnliche Produkt ωt duch das gewöhnliche Skalarprodukt $\omega t := < \omega, t >$. Die so neu aus f entstehenden Funktionen $\mathcal{F}(f)$ nennen wir *Fourier-Transformierte* von f. Wir werden später sehen, daß $\bar{\mathcal{F}}(f)$ als dazu *inverse Fourier-Transformierte* aufgefaßt werden kann.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P1. Welches sollte im naiven, physikalischen Sinn die Fourier-Transformierte von $f := \sin$ sein?

Aufgabe P2. Kann eine nicht abklingende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zu $\mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ gehören, z. B konstante Funktionen? Wie würden Sie abklingend definieren?

Aufgabe P3. Hat die Hutfunktion f eine Fourier-Transformierte? Was würden Sie unter Hutfunktion verstehen?.

Hausaufgaben:

Aufgabe 1. (a) Seien h, n mit $0 < h < 1$, $n \in \mathbb{Z}$ gegeben. Man berechne $\mathcal{F}(f)$ und $\bar{\mathcal{F}}(f)$ für

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [n - h/2, n + h/2], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.4}$$

(b) Man zeige, daß $\hat{f}$ und $\check{f}$ nicht notwendig in $\mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ liegen.

Aufgabe 2. Man berechne $\hat{f}$ und $\check{f}$ für $f(t) = \mathrm{e}^{-\dfrac{t^2}{2\sigma^2}}$ bei gegebenem $\sigma \neq 0$.