Approximation

Lösungshinweise

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 11: Ausgabetermin: am 29. Juni 2000

Abgabetermin: am 6. Juli 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P31. Wieviele Operationen braucht man, um einen Spline $s = \sum_j a_j B_{jk}$ der Ordnung k an einer vorgegebenen Stelle $t \in \mathbb{R}$ auszuwerten?

Lösung. Die Rekursionsformel (11.3b) wird insgesamt $(k-1)+(k-2)+\cdots+1 = (k-1)k/2$ mal angewendet. Sie enthält zwei Multiplikationen und zwei Additionen/Subtraktionen und die Berechnung eines ω, das eine Division und zwei Subtraktionen benötigt, zusammen also 7 *flops* pro Schritt, insgesamt also $7(k-1)k/2$ flops.

Aufgabe P32. Dieselbe Frage für die Ableitung s'.

Lösung. Es müssen zuerst $k-1$ neue Koeffizienten mit jeweils einer Division, einer Multiplikation und zwei Subtraktionen berechnet werden, insgesamt also $4(k-1)$ flops. Die Auswertung braucht $7(k-2)(k-1)/2$ flops, da die Ordnung bei der Ableitung sich um Eins reduziert.

Aufgabe P33. Unter welchen Bedingungen an die Interpolationsknoten τ_j kann das Interpolationsproblem für $s \in \langle B_{1k}, B_{2k}, \dots, B_{nk}\rangle$ gelöst werden?

Lösung. Eine explizite Formulierung des Problems und die Lösung finden Sie auf Bogen 12, vorn.

Hausaufgaben:

Aufgabe 21. Seien B_{j2} die linearen B-Splines zu einer einfachen Knotenfolge $\mathbf{t}$ und (a) $\tau_j = 0.5(t_j + t_{j+1})$. Bestimmen Sie die Matrix $M = B_{j2}(\tau_k)$, $j, k = 1, 2, \dots, n$ und zeigen Sie, daß sie nicht singulär ist. (b) Zeigen Sie, daß die letzte Aussage richtig bleibt, wenn $\tau_j \in]t_j, t_{j+1}[$ gewählt werden. (c) Bestimmen Sie eine n-elementige Teilmenge von $\mathbf{t}$ als Interpolationsknoten für die das Interpolationsproblem lösbar ist.

Lösung.

$$B_{j2}(t) = \begin{cases} \dfrac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j} & \text{für } t \in [t_j, t_{j+1}[, \\ \dfrac{t_{j+2} - t}{t_{j+2} - t_{j+1}} & \text{für } t \in [t_{j+1}, t_{j+2}[, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt im Fall (a)

$$B_{j2}(\tau_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } \tau_k \notin]t_j, t_{j+1}[, \text{ also für } k < j, \text{ und } k > j+1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } k = j, \text{ und } k = j+1 \le n. \end{cases}$$

Die Determinante der Matrix ist positiv, also nicht singulär. Im Fall (b) entsteht auch eine obere Dreiecksmatrix mit positiven Einträgen, und nur die erste Superdiagonale ist von Null verschieden. (c) Wählt man $\tau_j = t_{j+r}$, mit einem noch unbekannten $r \in \mathbb{Z}$, so ist $B_{j2}(t_\ell) = 0$ für alle $\ell \neq j+1$ und $B_{j2}(t_{j+1}) = 1$. Wir müssen also $\tau_j = t_{j+1}$, $j = 1, 2, \dots, n$ wählen.

Aufgabe 22. Bestimmen Sie die zur Knotenfolge $\mathbf{t} := \{\dots, -1, -1, 0, 1, 1, \dots,\}$ gehörenden B-Splines.

Lösung. Wir numerieren die Knoten in der Form

$$t_j := \begin{cases} 0 & j = 0, \\ \operatorname{sign} j & \text{für } j \neq 0. \end{cases} \tag{L11.1}$$

Dann sind bei Ordnung k genau die $k+1$ B-Splines $B_{-k,k}, B_{-k+1,k}, \dots, B_{0,k}$ nicht trivial. Diese Splines der Ordnung 4 sind in Abb. L11.1 gezeichnet.

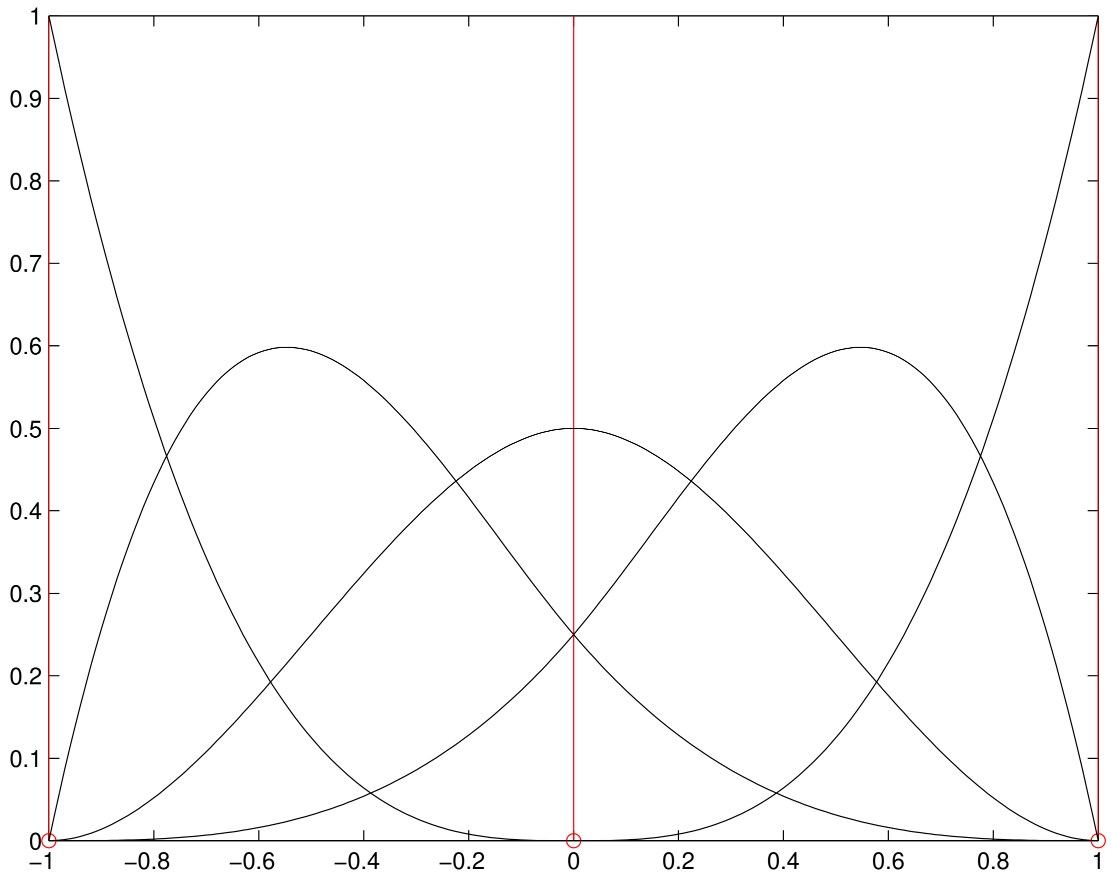

Abb. L11.1. Kubische Splines zur Knotenfolge $,\dots,-1,-1,0,1,1,\dots,$

Die frühere Rekursionsformel (9.1) für die B-Splines heißt in diesem Fall:

$$\begin{aligned} B_{-1,1} &:= \chi_{[-1,0[}, \quad B_{0,1} := \chi_{[0,1[}, \quad \chi \text{ ist Indikatorfunktion,} \\ \omega_{j,k} &:= \begin{cases} 0 & \text{für } j \leq -k,\ j \geq 1, \\ t+1 & \text{für } j = -k+1, \\ \frac{t+1}{2} & \text{für } -1 \geq j \geq -k+2, \\ t & \text{für } j = 0, \end{cases} \\ B_{j,k} &:= \omega_{j,k} B_{j,k-1} + (1-\omega_{j+1,k}) B_{j+1,k-1}, \quad k \geq 2,\ j \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{L11.2}$$

Daraus ergibt sich ohne große Mühen

$$\begin{aligned} B_{-k,k} &= \omega_{-k,k} B_{-k,k-1} + (1-\omega_{-k+1,k}) B_{-k+1,k-1} = (1-(t+1)) B_{-k+1,k-1} = (-t)^{k-1} B_{-1,1}, \\ B_{0,k} &= \omega_{0,k} B_{0,k-1} + (1-\omega_{1,k}) B_{1,k-1} = t B_{0,k-1} = t^{k-1} B_{0,1}. \end{aligned}$$

Weitere explizite Formeln sind mühsamer zu erhalten. Die obigen Splines haben alle die Form $B_{j,k} = p_j B_{-1,1} + q_j B_{0,1}$, $j = -k, -k+1, \ldots, 0$ mit Polynomen p_j, q_j der Ordnung k. Für $k = 4$ (kubische Splines) sind diese Polynome

$$
\begin{aligned}
p_{-4}(t) &= (-t)^3, \\
q_{-4}(t) &= 0, \\
p_{-3}(t) &= (7/4)t^3 + (3/4)t^2 - (3/4)t + 1/4 = (1/4)(t+1)(7t^2 - 4t + 1), \\
q_{-3}(t) &= -(1/4)t^3 + (3/4)t^2 - (3/4)t + 1/4 = (-1/4)(t-1)^3, \\
p_{-2}(t) &= -t^3 - (3/2)t^2 + 1/2 = ((1/2) - t)(t+1)^2, \\
q_{-2}(t) &= t^3 - (3/2)t^2 + 1/2 = ((1/2) + t)(t-1)^2, \\
p_{-1}(t) &= (1/4)t^3 + (3/4)t^2 + (3/4)t + 1/4 = (1/4)(t+1)^3, \\
q_{-1}(t) &= -(7/4)t^3 + (3/4)t^2 + (3/4)t + 1/4 = (1/4)(1-t)(7t^2 + 4t + 1), \\
p_0(t) &= 0, \\
q_0(t) &= t^3.
\end{aligned}
$$

Die Polynome p_{-k+j}, q_{-j} haben eine j-fache Nullstelle bei -1, bzw. bei $+1$ und $q_{-j}(t) = p_{-k+j}(-t)$, $j = 0, 1, \ldots, k$. Es genügt also, die Polynome p_{-j}, $j = 1, 2, \ldots, k-1$ auszurechnen. Da diese Polynome die Form $p_{-j}(t) =: (t+1)^{k-j}\tilde{p}_{-j}(t)$ haben mit $\tilde{p}_{-j} \in \Pi_{j-1}$, genügt es schließlich, die Polynome $\tilde{p}_{-j}$ zu berechnen.