Approximation

Lösungshinweise

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 10: Ausgabetermin: am 22. Juni 2000
Abgabetermin: am 29. Juni 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P28. Seien S die sp-Funktionen der Ordnung k mit Knotenfolge $\mathbf{t}$ und $\mathbb{S}_{k,\mathbf{t}}$ der von den B-Splines aufgespannte Raum. Offensichtlich ist $S_{k,\mathbf{t}} \subset S$. Welche Elemente von S liegen in $S_{k,\mathbf{t}}$?

Lösung. Ist $\#t_j$ die Vielfachheit des Knotens t_j und ist $s \in S$ am Knoten t_j genau g_j mal stetig differenzierbar, so ist $s \in S_{k,\mathbf{t}}$, genau dann, wenn $g_j = k - 1 - \#t_j$ an jedem Knoten t_j. Daraus folgt die Formel

$$\text{(L10.1)} \qquad \text{Ordnung } k = g_j + 1 + \#t_j \text{ an jedem Knoten } t_j.$$

Aufgabe P29. (a) Was ist die Kondition einer Basis? (b) Wie kann man die Kondition der beiden Basen (i) $1, t$, (ii) $1, t-a$ auf dem Intervall $[a,b]$ vergleichen. Man behandele das Beispiel $[a,b] = [100, 101]$.

Lösung. (a) Sei $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Basis in einem Raum X stetiger Funktionen (hier sind auch andere Situationen denkbar). Für $x \in X$ gilt dann $x = \sum_{j=1}^n a_j v_j$ und gefragt ist nach Konstanten $0 < m \leq M$ mit

$$\text{(L10.2)} \qquad m||a||_\infty \leq ||\sum_{j=1}^n a_j v_j||_\infty \leq M||a||_\infty.$$

Diese Konstanten könnte man als *Kondition* der Basis bezeichnen. Dabei ist $a = (a_1, a_1, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ und $||a||_\infty = \max |a_j|$. (b1) Sei $x(t) = a_1 + a_2 t$ auf $t \in [a,b]$. Dann ist $|x(t)| \leq |a_1| + |a_2||t| \leq M||a||_\infty$ mit $M = \max_{t\in[a,b]} |t|$. Im betrachteten Fall $[a,b] = [100,101]$ ist $M = 101$. (b2) Sei $x(t) = a_1 + a_2(t-a)$ auf $t \in [a,b]$. Dann ist $|x(t)| \leq |a_1| + |a_2||t-a| \leq M||a||_\infty$ mit $M = \max_{t\in[a,b]} |t-a|$. Im betrachteten Fall $[a,b] = [100,101]$ ist $M = 1$. Die Basen haben also deutlich verschiedene Kondition. Die unteren Schranken sind schwieriger zu gewinnen.

Aufgabe P30. Was sind radiale Splines?

Lösung. Sind x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ paarweise verschiedene Knoten in $\mathbb{R}^m$, so betrachten wir den Raum

$$\text{(L10.3)} \qquad S := \langle \phi(x - x_1), \phi(x - x_2), \ldots, \phi(x - x_n) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^m$$

wobei

$$\text{(L10.4)} \qquad \phi(x) := \varphi(||x||)$$

eine Funktion ist, bei der die Werte nur vom Abstand der Argumente vom Nullpunkt abhängen (*radiale Funktion*). Elemente in S nennt man *radiale Splines*. Beispiele: $\phi(x) := ||x||$ (euklidischer Abstand), $\phi(x) := \exp(-\alpha||x||^2)$. Das Erstaunliche ist, daß die Matrizen $M = \phi(x_j - x_k)$ in vielen Fällen, insbesondere in den genannten nicht singulär sind, das Interpolationsproblem in S also immer eindeutig gelöst werden kann. Für $m = 1$ reduzieren sich die radialen Splines in vielen Fllen auf die üblichen Splines mit einfachen Knoten. In manchen Fällen muß man S geringfügig erweitern zu

$$\text{(L10.5)} \qquad \tilde{S} := \langle S, \Pi_2 \rangle,$$

wobei von Π_2 häufig nur der Teilraum Π_1 oder Π_0 gebraucht wird. Der Raum Π_2 ist hier der Raum aller Polynome in m Veränderlichen bis zum Grad Zwei.

Hausaufgaben:

Aufgabe 19. Seien $p \in \Pi_n$, $x \in [a,b]$. Beweisen Sie die folgende Ungleichung von A. A. Markov (1889):

$$|p'(x)| \leq \frac{2n^2}{b-a}||p||_\infty \quad \text{mit} \quad ||p||_\infty := \max_{x\in[a,b]} |p(x)|. \tag{10.4}$$

Hinweis: Man kann zeigen, daß Gleichheit in (10.4) genau für das Tschebyscheffpolynom T_n angenommen wird. Es ist daher zweckmäßig, in (10.4) eine Transformation auf das Intervall $[-1,1]$ vorzunehmen und Polynome mit $||p||_\infty \leq 1$ zu betrachten. Durch wiederholte Anwendung von (10.4) ergibt sich sofort eine Abschätzung für $|p^{(j)}(x)|$, $j>1$, die aber zu pessimistisch ist. Eine bessere Abschätzung von $|p^{(j)}(x)|$, $j>1$ stammt von V. A. Markov (1916), einem Bruder von A. A. Markov. Man beweise ggf. (für die halbe Punktzahl) die Existenz einer Konstanten c_n mit

$$|p'(x)| \leq \frac{c_n}{b-a}||p||_\infty \quad \text{mit} \quad ||p||_\infty := \max_{x\in[a,b]} |p(x)|. \tag{10.4$'$}$$

Lösung. Unter einem *trigonometrischen Polynom vom Grad* n versteht man eine Abbildung $t_n : [0,2\pi[\to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{K}=\mathbb{C}$) vom Typ

$$t_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{n}(a_j \cos jt + b_j \sin jt), \quad x \in [0,2\pi[, \tag{L10.6a}$$

oder äquivalent

$$t_n(t) := \sum_{j=-n}^{n} c_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}jt}, \quad x \in [0,2\pi[. \tag{L10.6b}$$

Im Regelfall sind die Koeffizienten a_j, b_j reell und c_j komplex. Mittels der de Moivreschen Formel $\mathrm{e}^{\mathrm{i}jt} = \cos t + \mathrm{i}\sin t$ ist eine Umrechnung (L10.6a) $\leftrightarrow$ (L10.6b) einfach möglich. Es ist meistens einfacher mit trigonometrischen Polynomen der Form (L10.6b) zu rechnen. Trigonometrische Polynome sind 2π-periodische auf ganz $\mathbb{R}$ erklärte Funktionen, daher ist immer $t_n(0)=t_n(2\pi)$, und das Intervall $[0,2\pi[$ ist als abgeschlossenes, also kompaktes Intervall aufzufassen. Am zweckmäßigsten stellt man sich $[0,2\pi[$ als die Einheitskreislinie vor. Der Zwischenwertsatz hat hier eine besondere Form: Hat ein trigonometrisches Polynom (allgemein eine stetige, periodische Funktion) $2k$ Vorzeichenwechsel, so hat sie auch $2k$ Nullstellen. Zum Beweis markiere man sich die $2k$ Vorzeichenwechsel v_j, $j=1,2,\ldots,2k$ auf einer Kreislinie. Dann gibt es neben den $2k-1$ Nullstellen zwischen v_j und v_{j+1} auch noch eine Nullstelle zwischen v_{2k} und v_1. Ähnliches gilt (nach denselben Argumenten) auch für den Satz von Rolle: Hat eine stetig differenzierbare, periodische Funktion k Nullstellen, so hat die Ableitung auch k Nullstellen. Die Menge aller trigonometrischen Polynome bildet einen Haarschen Raum der Dimension $2n+1$. Jedes nicht verschwindende trigonometrische Polynom hat also höchstens $2n$ Nullstellen. Das kann man leicht erkennen, wenn man in der Form (L10.6b) $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ setzt und z^{-n} ausklammert. Wir benutzen das folgende Lemma, in dessen Beweis der obige Zwischenwertsatz und Satz von Rolle benutzt werden.

Lemma L10.1. Sei t_n ein beliebiges, trigonometrisches Polynom vom Grad n. Dann gilt

$$|t_n'(t)| \leq n||t_n||_\infty. \tag{L10.7}$$

Beweis: Sei die Behauptung nicht wahr. Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom t_n mit $||t_n'||_\infty = cn$ mit $c > ||t_n||_\infty$. Es gibt also Punkte τ mit $|t_n'(\tau)| = cn$. Die Behauptung ändert sich nicht, wenn wir t_n mit einem komplexen Faktor der Länge Eins multiplizieren. Wir können also $t_n'(\tau) = cn$ annehmen. Da t_n' bei τ ein Maximum annimmt, ist $t_n''(\tau) = 0$. Wir definieren ein neues trigonometrisches Polynom vom Grad n,

$$s_n(t) := c\sin n(t-\tau) - t_n(t).$$

An den $2n$ Punkten $t := \tau_k := \tau + \frac{(2k+1)\pi}{2n}, k = 0, 1, \ldots, 2n-1$ nimmt $\sin n(t-\tau)$ abwechselnd die Werte ± 1 an, und das neue trigonometrische Polynom s_n wechselt an diesen Stellen das Vorzeichen, d. h. s_n hat $2n$ Nullstellen, und daher haben auch die Ableitung

$$s_n'(t) := cn \cos n(t-\tau) - t_n'(t)$$

und die zweite Ableitung

$$s_n''(t) := -cn^2 \sin n(t-\tau) - t_n''(t)$$

$2n$ Nullstellen. Eine von den Nullstellen von s_n' ist τ wegen $s_n'(\tau) := cn - t_n'(\tau) = 0$. Da die $2n$ Nullstellen von s_n'' zwischen den Nullstellen von s_n' liegen, ist wegen $s_n''(\tau) = s_n''(t) = -t_n''(\tau) = 0$ der Punkt τ eine weitere Nullstelle von s_n''. Das trigonometrische Polynom s_n'' hat also $2n+1$ Nullstellen. Andererseits hat es den Grad n und damit höchstens $2n$ Nullstellen, also $s_n'' = 0$. Das geht nur, wenn s_n konstant ist. Das ist aber nicht möglich, da s_n das Vorzeichen wechselt. Die Annahme kann also nicht stimmen. $\square$

Korollar L10.2. Sei $p \in \Pi_n$ ein beliebiges Polynom vom Grad n auf dem Intervall $[-1, 1[$. Dann ist

$$|p'(x)| \le n \frac{||p||_\infty}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in]-1, 1[. \tag{L10.8}$$

Beweis: Wir setzen $x := \cos(t+\pi)$. Das ist eine strikt monoton wachsende, also umkehrbare Funktion $x : [0, \pi[\to [-1, 1[$. Dann ist $t_n(t) := p_n(\cos(t+\pi))$ ein trigonometrisches Polynom mit $t_n'(t) = -p_n'(x)\sin(t+\pi)$. Wegen $\sin = \sqrt{1-\cos^2}$ folgt dann aus dem Lemma L10.1, Formel (L10.7), die angegebene Ungleichung. $\square$

Anmerkung: Die Verwendung von $\cos(t+\pi)$ statt $\cos t$ hat nur die Bedeutung, daß die angegebene Transformation wachsend ist. Hätte man $x := \cos t$ verwendet, so wäre diese Transformation fallend gewesen. Die Ungleichung (L10.8) heißt auch *Bernsteinsche Ungleichung*. Um die Ungleichung von Markov zu beweisen, ist das folgende Lemma wesentlich.

Lemma L10.4. (Schur) Sei $p \in \Pi_{n-1}$ ein beliebiges (komplexes) Polynom vom Grad $n-1$. Dann gilt die folgende Implikation:

$$|p(x)| \le \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} \text{ für alle } x \in]-1, 1[\quad \Rightarrow \quad |p(x)| \le cn \text{ für alle } x \in [-1, 1]. \tag{L10.9}$$

Beweis: Seien $-1 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_2 < x_1 < 1$ die Nullstellen des Tschebyscheffpolynoms T_n. (a) Sei $|x| \le x_1$ (also $x \in [x_n, x_1]$). Dann ist

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{2n}}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{2n}} \le n.$$

Aus der Konvexität von sin auf $[0, \pi/2]$ folgt $\sin x \ge \frac{2}{\pi}x$ und damit die letzte Ungleichung. (b) Sei $x \notin [x_n, x_1]$. Für diese x schreiben wir p als Interpolationspolynon an den Tschebyscheffknoten, also

$$p(x) = \sum_{j=1}^n p(x_j)\ell_j(x), \quad \ell_j \text{ Lagrangekoeffizienten.} \tag{L10.10}$$

Die Polynome $\ell_j \in \Pi_{n-1}$ haben die bekannte Form

$$\ell_j(x) := \Pi_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} \frac{x-x_k}{x_j-x_k} = \frac{\ell(x)}{(x-x_j)\ell'(x_j)}$$

mit $\ell(x) := \Pi_{j=1}^n (x-x_j)$. Das ist bis auf einen Faktor aber das Tschebyscheffpolynom T_n, also ist

$$\ell_j(x) = \frac{T_n(x)}{(x-x_j)T_n'(x_j)}. \tag{L10.11}$$

Um T_n' zu berechnen, setzen wir wieder $x = \cos t$ und entsprechend $t_j = \arccos x_j = (2j-1)\pi/(2n)$. Dann ist wegen $T_n(\cos t) = \cos nt$

$$T_n'(x) = n\,\frac{\sin nt}{\sin t} \quad \Rightarrow \quad |T_n'(x_j)| = n\,\frac{|\sin nt_j|}{\sqrt{1-x_j^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-x_j^2}}. \tag{L10.12}$$

Da, wie wir schon bemerkt haben, T_n bis auf einen Faktor mit $\ell(x) = (x-x_1)\cdots(x-x_n)$ übereinstimmt, so ist auch

$$T_n'(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{T_n(x)}{x-x_j}. \tag{L10.13}$$

Setzen wir (L10.11) und (L10.12) in (L10.10) ein, und ersetzen wir jetzt in dieser Formel $|p(x_j)|$ durch die gegebene oberen Schranke (L10.9), so ist

$$|p(x)| \le \frac{c}{n}\sum_{j=1}^{n}\Big|\frac{T_n(x)}{x-x_j}\Big|.$$

Nun ist $x < x_n$ oder $x > x_1$, d. h. alle $\frac{T_n(x)}{x-x_j}$ haben (bei festem x) dasselbe Vorzeichen und damit ist (mit (L10.13))

$$|p(x)| \le \frac{c}{n}\Big|\sum_{j=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_j}\Big| = \frac{c}{n}|T_n'(x)| \le cn.$$

Die letzte Abschätzung $T_n'(1) = n^2 \ge |T_n'(x)|$ folgt aus (L10.12) (vollst. Induktion und Additionstheorem). □

Satz L10.5. Für jedes Polynom $p \in \Pi_n$, definiert auf $[-1,1]$ gilt:

$$|p'(x)| \le n^2 ||p||_\infty. \tag{L10.14}$$

Beweis: Folgt aus der Bernsteinschen Ungleichung L10.8 und aus L10.9, Lemma L10.4 von Schur. □

Korollar L10.6. Für jedes Polynom $p \in \Pi_n$, definiert auf $[a,b]$ gilt:

$$|p'(x)| \le \frac{2n^2}{b-a}||p||_\infty. \tag{L10.15}$$

Beweis: Man transformiere mit der linearen Transformation $y := l(x) := 2\frac{x-a}{b-a} - 1$ das Intervall $[a,b]$ auf $[-1,1]$ und wende den vorigen Satz an. □

Quelle: G. G. Lorentz: Approximation of functions, Chelsea, New York, 1986, 188 S. [S. 39–42]

Um (10.4′) zu beweisen, definieren wir die lineare Abbildung $\varphi : \Pi_n \to \Pi_{n-1}$ durch $\varphi(p) := p'$, wobei die Polynome als Teilmengen des normierten Vektorraums $\mathrm{C}[a,b]$, $a < b$ mit Maximumnorm $||\ \ ||_\infty$ aufgefaßt werden. Wegen der endlichen Dimension von Π_n ist φ und damit auch $f(p) := ||\varphi(p)||_\infty = ||p'||_\infty$ stetig. Sei jetzt $a=-1, b=1$. Wir definieren $P := \{p \in \Pi_n : ||p||_\infty := \max_{x\in[-1,1]}|p(x)| \le 1\}$. Wegen der Stetigkeit von f und der Kompaktheit von P existiert $c_n := \max_{p\in P} f(p)$. Für beliebige Polynome in Π_n auf $[-1,1]$ gilt daher $|p'(x)| \le c_n||p||_\infty$. Setzen wir $x = 2(y-a)/(b-a) - 1$, so entspricht $x \in [-1,1]$ gerade $y \in [a,b]$, und in $y \in [a,b]$ ist daher $|p'(y)| \le 2c_n/(b-a)||p||_\infty$.

Aufgabe 20. Zeigen Sie, daß sich aus der Darstellung (10.3) die bekannte Formel

$$B_{jk}(t) = q[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}](t_{j+k} - t_j), \quad t \in \mathbb{R} \tag{10.5}$$

für B-Splines ergibt, wobei $q[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}]$ die k-te dividierte Differenz ist von $q(\tau, t) := (\tau - t)_+^{k-1}$ bezüglich der Variablen τ. Also $q[t_j] = (t_j - t)_+^{k-1}$, $q[t_j, t_{j+1}] = \big((t_{j+1}-t)_+^{k-1} - (t_j - t)_+^{k-1}\big)/(t_{j+1} - t_j)$, wenn die Knoten t_j, t_{j+1} verschieden sind, usw. Hinweise: Nach der Definition ist ψ_{jk}^+ ein Polynom vom Grad $< k$ oder Null. Seien $\psi_{jk}^+[t_\ell, t_{\ell+1}, \ldots, t_{\ell+k}]$ die k-ten dividierten Differenzen von ψ_{jk}^+. Dann ist $\psi_{jk}^+[t_\ell, t_{\ell+1}, \ldots, t_{\ell+k}] = 0$, für $\ell \ne j$.

Lösung. Man bilde auf beiden Seiten der Formel (10.4) die dividierten Differenzen bez. der Knoten $t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}$ unter Beachtung der angegebenen Hinweise.