Approximation

Lösungshinweise

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 8: Ausgabetermin: am 25. Mai 2000
Abgabetermin: am 8. Juni 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P22. Unter welchen Bedingungen ist die zu einer b. A. $\hat{v}$ gehörenden Fehlerfunktion $\hat{\varepsilon} := f - \hat{v}$ streng monoton zwischen den Extremalstellen.

Lösung. Das trifft zu, wenn V und $W := \langle V, f\rangle$ beides Haarsche Räume mit $\dim W = \dim V + 1$ sind. Bei $\dim V = n$ und $V \subset \mathrm{C}^n[a,b]$ liegt dieser Fall vor, wenn $f^{(n)}$ keine Nullstelle in $]a,b[$ hat. Beispiel: Tschebyscheffpolynome, aufgefaßt als Fehlerfunktion der b. A. von $f(t) := t^n$ durch Elemente von $V := \Pi_{n-1}$ bei beliebigem Intervall $[a,b]$, $a < b$.

Aufgabe P23. Nennen Sie Haarsche Räume.

Lösung.

(L8.1) $$V := \langle \frac{1}{t-a_1}, \frac{1}{t-a_2}, \ldots, \frac{1}{t-a_n}\rangle \text{ auf } [a,b] \text{ mit } a_j \notin [a,b],$$

(L8.2) $$V := \langle t^{a_1}, t^{a_2}, \ldots, t^{a_n}\rangle \text{ auf } [a,b] \text{ mit } 0 < a < b,$$

in beiden Fällen a_j paarweise verschieden, $j = 1, 2, \ldots, n$.

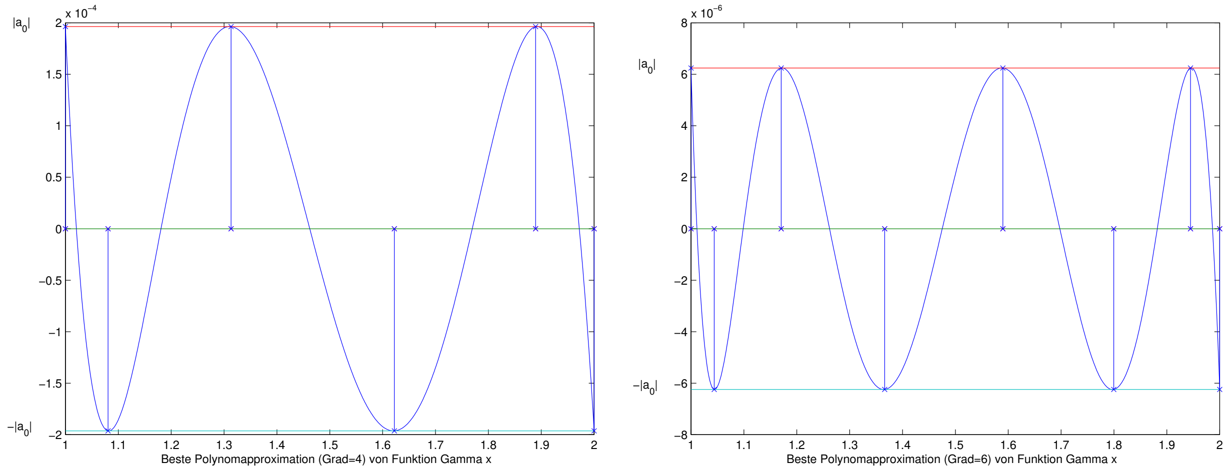
Aufgabe P24. Was ist die Grundidee beim Remez-Algorithmus?

Lösung. Man löst das duale Problem iterativ durch sukzessive Vergrößerung der unteren Schranke von $\rho_V(f)$ durch geschickte Wahl der Alternationsmenge. Die geschickte Wahl bedeutet, daß man die Knoten (Elemente der Alternationsmenge) in etwa in lokale Extrema der Fehlerfunktion legt. Die untere Schranke wird durch Lösen eines linearen Gleichungssystems ausgerechnet, das auf das Lösen von zwei Interpolationsproblemen reduziert werden kann.

Hausaufgaben:

Aufgabe 15. Bestimmen Sie mit einem vorgegebenen MATLAB-Programm remez.m (Internet an bekannter Stelle) die b. A. der Gammafunktion auf [1,2] in Π_n mit $n = 4$ und $n = 6$. Protokollieren Sie die Extremalpunkte t_j, $j = 1, 2, \ldots, n+2$, die Koeffizienten α_j, $j = 1, 2, \ldots, n+1$ und die Minimalabweichung $|\alpha_0|$. Verwenden Sie dabei die (Standard) MATLAB-Darstellung format short. Zeichnen Sie die beiden Fehlerfunktionen.

Lösung. Zuerst Polynomgrad vier:
Extremalpunkte: 1.0000, 1.0806, 1.3088, 1.6244, 1.8917, 2.0000.
Koeffizienten: 0.1746, -1.1825, 3.3755, -4.4675, 3.0997 (zuerst Höchstkoeffizient).
Untere Schranke: $1.963 \cdot 10^{-4}$.
Obere Schranke: $1.964 \cdot 10^{-4}$.
Jetzt Polynomgrad sechs:
Extremalpunkte: 1.0000, 1.0438, 1.1705, 1.3641, 1.5876, 1.7972, 1.9470, 2.0000.
Koeffizienten: 0.0761, -0.7818, 3.4365, -8.2698, 11.8436, -9.7478, 4.4433 (zuerst Höchstkoeffizient).
Untere Schranke: $6.245 \cdot 10^{-6}$.
Obere Schranke: $6.248 \cdot 10^{-6}$.
Alle Rechnungen mit nur einer Iteration.



Figur L8.1. Fehlerfunktionen der b. A. der Gamma-Funktion mit Polynomen vom Grad vier und sechs

Aufgabe 16. (a) Seien $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < b$ gegeben und

$$V := \langle 1, t, (t - t_1)_+, (t - t_2)_+, \ldots, (t - t_k)_+ \rangle.$$

Zeigen Sie: V ist ein schwacher Haarscher Raum der Dimension $n := k + 2$ in $\mathrm{C}[a, b]$. (b) Ändert sich etwas, wenn (b1) $t_1 = a$ oder (b2) $t_1 < a$. (c) Zeigen Sie, daß Haarsche Räume schwache Haarsche Räume sind.

Lösung. (a) Sei $V := \langle v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n \rangle$ mit $n = k + 2$. Wir zeigen zuerst die lineare Unabhängigkeit der v_j. Wir setzen $t_0 := a, t_{n-1} = b$. Sei also $v := \sum_{j=1}^n a_j v_j = 0$, also $v(t) = 0$ für alle $t \in [a, b]$. Für $t \in [t_0, t_1[$ ist $v(t) = a_1 + a_2 t$, also $a_1 = a_2 = 0$ und $v := \sum_{j=3}^n a_j v_j$. Für $t \in [t_1, t_2[$ ist $v = a_3 v_3$, also $a_3 = 0$ und $v := \sum_{j=4}^n a_j v_j$. Aus $v := \sum_{j=s}^n a_j v_j$ und $t \in [t_{s-2}, t_{s-1}[$ folgt dann $a_s = 0$, für $s = 3, 4, \ldots, n$. Damit haben wir die lineare Unabhängigkeit und damit $\dim V = n$ gezeigt. Die Elemente von V sind in jedem Teilintervall $[t_j, t_{j+1}]$, $j = 0, 1, \ldots, n - 2$ lineare Funktionen, können dort also höchstens einen Vorzeichenwechsel haben, insgesamt kann es also höchstens $n - 1$ Vorzeichenwechsel geben. Also ist V ein schwacher Haarscher Raum, aber kein Haarscher Raum, denn jedes $v_j, j \geq 3$ hat unendlich viele Nullstellen, ohne aber mit der Nullfunktion übereinzustimmen. (b1,b2) In beiden Fällen ist im betrachteten Intervall $(t - a)_+ = t - a$, die Dimension verringert sich um Eins.
(c) Bei stetigen Funktionen kann jede Nullstelle höchstens einen Vorzeichenwechsel auslösen. In Haarschen Räumen der Dimension n kann es also höchstens $n - 1$ Vorzeichenwechsel geben.