Approximation

Lösungshinweise

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 7: Ausgabetermin: am 18. Mai 2000
Abgabetermin: am 25. Mai 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P19. (a) In welchem Intervall ist $V := \langle\cos\rangle$ ein Haarscher Raum? (b) Dasselbe für $V := \langle x, x^3\rangle$.

Lösung. (a) Die Dimension von V ist Eins. Alle Intervalle in denen cos keine Nullstelle hat, sind geeignet, beispielsweise $[-\pi/4, \pi/4]$. (b) Die Dimension ist Zwei, alle Intervalle, in denen höchstens eine Nullstelle liegen kann, sind geeignet. Sei $v := ax + bx^3 = x(a + bx^2)$, dann liegt eine Nullstelle bei Null und zwei weitere bei $x = \pm\sqrt{-a/b}$, sofern $b \neq 0$. Ist $x \geq \gamma > 0$, so kann nur eine Nullstelle vorkommen, entsprechend bei $x \leq \gamma < 0$ kann auch nur eine Nullstelle existieren. Umgekehrt: Jedes Intervall I (mit positiver Länge), das die Null enthält, macht $V \subset \mathrm{C}(I)$ zu einem Nicht-Haarschen Raum.

Aufgabe P20. (a) Was ist eine Alternationsmenge und was ist (b) eine Alternante?

Lösung. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b$. (a) Die Punkte t_j mit $a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_m \leq b$ bilden eine *Alternationsmenge der Länge* m von f, wenn $f(t_j) \neq 0$ für $j = 1, 2, \ldots, m$ und $\operatorname{sign} f(t_j) + \operatorname{sign} f(t_{j+1}) = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, m-1$. (b) Eine Alternationsmenge heißt eine *Alternante der Länge* m, wenn zusätzlich $|f(t_j)| = ||f||_\infty$ für alle $j = 1, 2, \ldots, m$ gilt. Für die Länge m gilt also immer $m \geq 2$.

Aufgabe P21. Wie lautet der Satz von de la Vallée-Poussin für Haarsche Räume auf Intervallen $[a, b]$?

Lösung. Sei $\dim V = n$ und $a \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_{n+1} \leq b$ eine Alternationsmenge von $\varepsilon := f - v$. Dann ist $\rho_V(f) \leq \min_{j=1,2,\ldots,n+1} |\varepsilon(t_j)|$. Ist $V := \Pi_{n-1}$, so gilt sogar $\rho_V(f) \leq \min_{j=1,2,\ldots,n} \frac{1}{2}(|\varepsilon(t_j)| + |\varepsilon(t_{j+1})|)$.

Hausaufgaben: Zeigen Sie durch Lösen der beiden folgenden Aufgaben, daß strikt konvexe Räume nicht notwendig gleichmäßig konvex sind.

Aufgabe 13. Betrachten Sie $X = \mathrm{C}[0, 1]$ in der Maximumsnorm $||\ \ ||_\infty$. Konstruieren Sie dazu eine äquivalente strikte Norm $||\ \ ||$ nach folgender Technik: Wählen Sie eine dichte Folge $\{t_j\}$ in $[0, 1]$ mit $t_j \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Definieren Sie $F : X \to \ell_2$ durch $F(x) := (||x||_\infty, \frac{1}{2}x(t_1), \frac{1}{2^2}x(t_2), \frac{1}{2^3}x(t_3), \ldots)$ und zeigen Sie (a), daß $F(x) \in \ell_2$. Definieren Sie eine neue Norm $||x|| := ||F(x)||_2$ und zeigen Sie (b), daß diese strikt ist und (c) äquivalent zur Ausgangsnorm.
Zur Illustration aber auch als Hinweis für den kommenden Teil folgendes Beispiel: Sei $x(t) = 1$ die konstante Funktion Eins. Dann ist $||x||_\infty = 1$. Wir wollen auch $||x||$ berechnen. Es ist $F(x) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$, und $||x||^2 = ||F(x)||_2^2 = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^{2j}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$, also $||x|| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Ist also $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, so ist $||x|| = 1$.

Lösung. Zuerst sollte man sich überzeugen, daß durch $||x|| := ||F(x)||_2$ überhaupt eine Norm definiert ist. Sei $||x|| = 0$, dann ist $F(x) = 0$, da $||\ \ ||_2$ eine Norm ist. Jede Komponente von $F(x)$ ist also Null, insbesondere die erste $||x||_\infty = 0$, also $x = 0$. Weiter ist $||\alpha x|| := ||F(\alpha x)||_2 = |\alpha|\,||F(x)||_2 = |\alpha|\,||x||$. Die Dreiecksungleichung überträgt sich direkt.
(a) $||x||^2 := ||F(x)||_2^2 = (||x||_\infty^2 + |\frac{1}{2}x(t_1)|^2 + |\frac{1}{2^2}x(t_2)|^2 + \cdots) \leq ||x||_\infty^2(1 + \frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2^2}^2 + \cdots) = \frac{4}{3}||x||_\infty^2$ nach dem obigen Beispiel. Also ist $||x|| := ||F(x)||_2 \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}||x||_\infty$. Damit ist $F(x) \in \ell_2$ für jedes $x \in X$.
(b) Seien $x \neq 0, y \neq 0$ und $||x|| = ||y|| = ||x + y||$. Nach der Definition von $||\ \ ||$ ist das gleichbedeutend mit $||F(x)||_2 = ||F(y)||_2 = ||F(x+y)||_2$. Nun ist $||F(x+y)||_2 = ||\,(||x+y||_\infty, \frac{1}{2}(x+y)(t_1), \frac{1}{2^2}(x+y)(t_2), \ldots)\,||_2 \leq ||F(x) + F(y)||_2$ und nach der Dreiecksungleichung für $||\ \ ||_2$ ist $||F(x) + F(y)||_2 \leq ||F(x)||_2 + ||F(y)||_2$. Insgesamt erhalten wir also $||F(x)||_2 = ||F(y)||_2 = ||F(x+y)||_2 \leq ||F(x) + F(y)||_2 \leq ||F(x)||_2 = ||F(y)||_2$, es steht also überall das Gleichheitszeichen. Da $||\ \ ||_2$ eine strikte Norm ist, folgt $F(x) = \alpha F(y)$ für ein $\alpha > 0$, also $(||x||_\infty, \frac{1}{2}x(t_1), \frac{1}{2^2}x(t_2), \frac{1}{2^3}x(t_3), \ldots) = \alpha(||y||_\infty, \frac{1}{2}y(t_1), \frac{1}{2^2}y(t_2), \frac{1}{2^3}y(t_3), \ldots)$ und insbesondere $x(t_j) = \alpha y(t_j)$ für eine dichte Teilmenge von $[0, 1]$. Da x, y stetig sind, folgt $x(t) = \alpha y(t)$ für alle $t \in [0, 1]$.

(c) Nach den Rechnungen in (a) folgt $||x|| := ||F(x)||_2 \geq ||x||_\infty$. Zusammen mit (a) folgt also

$$||x||_\infty \leq ||x|| \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}||x||_\infty. \tag{L7.1}$$

Aufgabe 14. Zeigen Sie, daß die in der vorigen Aufgabe konstruierte Norm nicht gleichmäßig konvex ist. Benutzen sie dazu die auf dem Lösungsbogen 5, Aufgabe P15, (b2) angegebene Definition der gleichmäßigen Konvexität. Betrachten Sie jetzt die Funktionenfolgen $\{x_j(t)\}$, $\{y_j(t)\}$ mit $y_j(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Die Folge $\{y_j(t)\}$ ist also konstant (für jedes j dasselbe Element) und jedes Folgenglied ist eine konstante Funktion. Nach dem obigen Beispiel ist $||y_j(t)|| = 1$. Die Folge $\{x_j(t)\}$ wird folgendermaßen definiert:

$$h_j(t) := \frac{1}{2}\sqrt{3}\begin{cases} jt & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{j}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{j} \leq t \leq 1, \end{cases} \quad x_j(t) := \frac{h_j(t)}{||h_j||}. \tag{L7.2}$$

Ganz offensichtlich ist $||x_j|| = 1$ für alle j. Zeigen Sie also, daß $||\frac{x_j+y_j}{2}|| \to 1$, aber $||x_j - y_j||$ nicht gegen Null konvergiert.

Lösung. (i) Wir setzen $c := \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Aus (L7.2) folgt $||h_j||_\infty = c$ und aus (L7.1) folgt dann $||h_j|| \leq \frac{1}{c}||h_j||_\infty = 1$ und daher $x_j(t) \geq h_j(t)$. Ganz offensichtlich konvergiert $h_j(t)$ für $t > 0$ punktweise gegen c und daher auch $||h_j||$ von oben gegen Eins, denn in der für $||h_j||$ aufzustellenden Summe kommt der Funktionswert $h_j(t)$ für $t = 0$ nicht vor (alle $t_k \neq 0$), und daher konvergiert auch $x_j(t)$ punktweise für $t > 0$ gegen c. Somit konvergiert auch $\frac{x_j+c}{2}$ punktweise für $t > 0$ gegen c und alle in der Summe für $||\frac{x_j+c}{2}||$ auftretenden Funktionswerte konvergieren gegen c, da unter den zu verwendenden Funktionswerten die Null nicht vorkommt, also $||\frac{x_j+c}{2}|| \to 1$.
(ii) Es ist $|x_j(0) - y_j(0)| = c$, also $||x_j - y_j||_\infty \geq c$ und nach (L7.1) gilt $||x_j - y_j|| \geq c > 0$ für alle j. Damit ist $|| \quad ||$ nicht gleichmäßig konvex.

Quelle: E. PFLAUMANN & H. UNGER: Funktionalanylysis I, BI, Mannheim, 1974, S. 135–137.