Approximation

Lösungshinweise

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 6: Ausgabetermin: am 11. Mai 2000
Abgabetermin: am 18. Mai 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P16. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. (a) Zeigen Sie, daß ein endlich dimensionaler Teilraum $V \subset X$ proximinal ist. (b) Was bedeutet das?

Lösung. (b) Sei durch $Q = (X, ||\quad||, f, V)$ ein Approximationsproblem definiert. Die Teilmenge V heißt *proximinal*, wenn zu jedem f eine b. A. existiert. (a) Sei $\hat{v}$ eine b. A. von f und sei die Nullfunktion in V. Dann ist $\|\hat{v}\| - ||f|| \le ||f - \hat{v}|| \le ||f - v||$ für alle v, insbesondere für $v = 0$ ist $\|\hat{v}\| \le 2||f||$. In endlich dimensionalen Räumen sind die Kugeln kompakt, d. h. die stetige Funktion $F(v) := ||f - v||$ hat auf $\{x : ||x|| \le 2||f||\}$ ein Minimum.

Aufgabe P17. Ist $|1 + \mu| = 1 + |\mu|$ und $\mu \in \mathbb{K}\backslash 0$, so ist $\mu > 0$. Geben Sie dafür einen Beweis.

Lösung. Wegen $\mu \neq 0$ ist $r := 1 + |\mu| > 1$. Dann gilt $\mu \in \{x \in \mathbb{C} : |1 + x| = r\} \cap \{x \in \mathbb{C} : |x| = r - 1\}$. Die erste Menge ist ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt -1, die zweite Menge ist ein Kreis mit Radius $r - 1$ und Mittelpunkt Null. Die beiden Kreise haben genau einen gemeinsamen Schnittpunkt. Er liegt auf der x-Achse bei $x = r - 1 > 0$. Also $\mu = r - 1 > 0$.

Aufgabe P18. Sei durch $Q := (X, ||\quad||, f, V)$ ein Approximationproblem beschrieben. Zeigen Sie: Ist V konvex, so ist die Menge aller b. A. von f konvex.

Lösung. Seien u, v b. A. von f und $w = (1 - \lambda)u + \lambda v$ für $\lambda \in [0, 1]$. Dann ist $\rho_V(f) \le ||f - w|| = ||f - (1 - \lambda)u + \lambda v|| = ||(1 - \lambda)(f - u) + \lambda(f - v)|| \le (1 - \lambda)||(f - u)|| + \lambda||(f - v)|| = \rho_V(f)$, es steht also überall das Gleichheitszeichen, und w ist auch b. A. von f.

Hausaufgaben:

Aufgabe 11. Satz 6.1. Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $<\quad,\quad>$ ist gleichmäßig konvex. Wiederholen Sie den Beweis.

Lösung. Sei $(X, <\quad,\quad>)$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, und $||\quad||$ die durch das Skalarprodukt gegebene Norm. Seien $||x|| = ||y|| = 1$. Es ist nach einfacher Rechnung

$$\begin{aligned} ||x - y|| &= \sqrt{2 - 2\Re < x, y >}, \\ ||\frac{1}{2}(x + y)|| &= \sqrt{\frac{1 + \Re < x, y >}{2}}. \end{aligned}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir definieren

$$\delta := \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - (\frac{\varepsilon}{2})^2} & \text{für } \varepsilon \le 2, \\ \frac{1}{2}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei zuerst $\varepsilon \le 2$ und $||\frac{1}{2}(x + y)|| > 1 - \delta$. Dann ist

$$\begin{aligned} ||x - y|| &= \sqrt{2 - 2\Re < x, y >}, \\ &= \sqrt{4 - 4\Big(\frac{1 + \Re < x, y >}{2}\Big)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{4 - 4||\frac{x+y}{2}||^2} \\
&< \sqrt{4 - 4(1-\delta)^2} \\
&= \sqrt{4 - 4\Big(1 - 1 + \sqrt{1 - (\frac{\varepsilon}{2})^2}\Big)^2} \\
&= \sqrt{4 - 4(1 - \frac{\varepsilon^2}{4})} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Für $\varepsilon > 2$ ist $||x-y|| \le ||x|| + ||y|| = 2 < \varepsilon$, die Behauptung also (unabhängig von der Wahl von $\delta > 0$) richtig.

Aufgabe 12. Sei $V = \langle 1, x, y\rangle \subset X := \mathrm{C}(\mathbb{R}^2)$. (a) Zeigen Sie, daß V die Haarsche Bedingung nicht erfüllt. (b) Betrachten Sie denselben Raum V als Teilraum von $X := \mathrm{C}(B)$ mit $B = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$. Zeigen Sie, daß er die Haarsche Bedingung erfüllt.

Lösung. (a) $v(x,y) := x - y$ hat unendlich viele Nullstellen, erfüllt also die Haarsche Bedingung nicht. (b) Die Elemente in V haben alle die Form $v(x,y) := a + bx + cy$ und $\dim V = n = 3$. Die Nullstellenmengen $v(x,y) = 0$ sind bei $|b| + |c| > 0$ Geraden in $\mathbb{R}^2$, die mit der Kreislinie B höchstens $n - 1 = 2$ Schnittpunkte haben können. Bei $b = c = 0$ und $a \neq 0$ gibt es gar keine Nullstellen.