Approximation

Lösungshinweise

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 5: Ausgabetermin: am 4. Mai 2000
Abgabetermin: am 11. Mai 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P13. Wie lauten Skelettsatz und Satz von de la Vallée-Poussin? Wenden Sie sie auf sehr einfache Beispiele an.

Lösung. Betrachten Sie die nachfolgenden Aufgaben 9 (de la Vallée-Poussin) und 10 (Skelettsatz).

Aufgabe P14. Für welche Approximationsprobleme kann man leicht die Existenz einer Lösung nachweisen?

Lösung. Ist das Problem durch $Q := (X, ||\quad||), f, V)$ gegeben, und ist V kompakt, so gibt es zu jedem f eine b. A. in V. Daraus folgt, daß auch für jeden endlich dimensionalen Vektorraum V eine b. A. zu jedem f existiert.

Aufgabe P15. Was sind (a) strikte und (b) gleichmäßige Normen?

Lösung. (a) $||x + y|| = ||x|| + ||y|| \Rightarrow x, y$ sind linear abhängig.
Äquivalente Formulierungen:
(a2) $||x + y|| = ||x|| + ||y||$ und $x \neq 0, y \neq 0 \Rightarrow$ es gibt $\mu > 0$ mit $x = \mu y$.
(a3) $||\frac{x+y}{2}|| = ||x|| = ||y|| = 1 \Rightarrow x = y$.
(a4) $||x|| = ||y|| = 1, x \neq y, z := (1 - \lambda)x + \lambda y$ mit $\lambda \in]0, 1[\quad \Rightarrow \quad ||z|| < 1$.
(b) Zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta > 0$ mit: Für alle x, y mit $||x|| = ||y|| = 1$ gilt: $||\frac{x+y}{2}|| > 1 - \delta \Rightarrow ||x - y|| < \varepsilon$.
Äquivalente Formulierung:
(b2) Seien $\{x_j\}, \{y_j\}$ zwei Folgen mit $||x_j|| = ||y_j|| = 1$ und $\lim_{j\to\infty} ||\frac{x_j+y_j}{2}|| = 1 \Rightarrow \lim_{j\to\infty} ||x_j - y_j|| = 0$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 9. Wenden Sie den Satz von de la Vallée-Poussin (kurz: dlVP) an auf das durch $Q := (\mathrm{C}[-1, 2], ||\quad||_\infty, f(x) := 1 - x^2, V := \langle 1, x\rangle)$ und $\hat{v}(x) := -x$ beschriebene Approximationsproblem. Bestimmen Sie also eine untere Schranke der Minimalabweichung $\mathrm{dist}(V, f)$ indem Sie für $\hat{v}$ die Voraussetzungen des Satzes von dlVP erfüllen. Hinweis: Verwenden Sie Punktfunktionale an den Stellen (a) $-1, 0, 2$ und (b) $-1, 0, 1.8$. (c) Berechnen Sie auch $||f - \hat{v}||_\infty$. Hinweis: In der ursprünglichen Aufgabe war durch ein Versehen $\hat{v}(x) := x$ angegeben. Für diesen Fall lassen sich mit den angegebenen Daten die Voraussetzungen nicht erfüllen. Falls Sie das herausgefunden haben, gilt dieser Teil der Aufgabe als gelöst.

Lösung. (a) Wir setzen $x^*(v) := \sum_{j=1}^{3} \lambda_j x_j^*(v) := \lambda_1 v(-1) + \lambda_2 v(0) + \lambda_3 v(2)$ mit (i) $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| = 1$. Wir müssen die beiden Gleichungen $x^*(1) = x^*(x) = 0$ erfüllen, also (iia) $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, (iib) $-\lambda_1 + 2\lambda_3 = 0$. Setzen wir (iib) in (iia) ein, so erhalten wir $\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0$. Setzen wir das in (i) ein, so ist $|2\lambda_3| + |3\lambda_3| + |\lambda_3| = 6|\lambda_3| = 1$. Wir setzen $\lambda_3 = 1/6$, und erhalten dann $\lambda_2 = -1/2$, $\lambda_1 = 1/3$. Die weiteren Bedingungen des Satzes von dlVP lauten: (iii) $\mathrm{sign}(\lambda_j x_j^*(f - \hat{v})) = \gamma$, wobei γ eine von j unabhängige Konstante mit $|\gamma| = 1$ ist. Im obigen speziellen Fall ist
$\mathrm{sign}(\lambda_1 x_1^*(f - \hat{v})) := \mathrm{sign}((1/3)(1 - x^2 + x)(-1)) = -1$,
$\mathrm{sign}(\lambda_2 x_2^*(f - \hat{v})) := \mathrm{sign}((-1/2)(1 - x^2 + x)(0)) = -1$,
$\mathrm{sign}(\lambda_3 x_3^*(f - \hat{v})) := \mathrm{sign}((1/6)(1 - x^2 + x)(2)) = -1$,
also sind alle Vorzeichen gleich, und die untere Schranke ergibt sich aus:
(iv) $\min_{j=1,2,3} |x_j^*(f - \hat{v}))| = \min(|(1 - x^2 + x)(-1)|, |(1 - x^2 + x)(0)|, |(1 - x^2 + x)(2)|) = 1 \leq \rho_V(f)$. Zu bemerken ist, daß alle zum Minimum herangezogenen Werte gleich sind, die beste Approximation mit $\hat{v}$ aber nicht erreicht wird, s. (c).
(b) Dieselbe Technik angewendet auf die gegebenen Punkte liefert $\lambda_1 = 9/28 \approx 0.3214, \lambda_2 = -1/2, \lambda_3 = 5/28 \approx 0.1786$, die weiteren Bedingungen (iii) sind erfüllt und $\min_{j=1,2,3} |x_j^*(f - \hat{v}))| = 0.44$.
(c) $||f - \hat{v}||_\infty = 5/4$.

Aufgabe 10. Sei ein Approximationsproblem definiert durch $Q := (\mathrm{C}[1,2], ||\ \ ||_\infty, f(x) := \Gamma(x), V := \langle 1, x, x^2, x^3, x^4\rangle)$. Dabei ist Γ die übliche Gammafunktion. (a) Bestimmen Sie die beste Approximation von f durch Anwendung des Skelettsatzes auf die Punkte $x_1 := 1, x_2 := 1.083, x_3 := 1.314, x_4 := 1.624, x_5 := 1.893, x_6 := 2$. Lösen Sie also das lineare Gleichungssystem $(f-v)(x_j) = (-1)^j\mu,\ j = 1,2,\ldots,6.$* Die Unbekannten in diesem 6×6-Gleichungssystem sind die fünf Koeffizienten des Polynoms v und μ. (b) Sei v die Lösung des linearen Gleichungssystems. Berechnen Sie die Normen $||f-v||_\infty$ ausgerechnet auf $[1,2]$ und auf den gegebenen sechs Punkten. Verwenden Sie zweckmäßigerweise eine Programmiersprache, in der die Gammafunktion vorprogrammiert ist, wie z B. MATLAB.

Lösung. (a) Wir setzen $V := \langle v_1, v_2, \ldots, v_5\rangle$ mit $v_k(x) := x^{k-1},\ k = 1,2,\ldots,5$. Dann lautet das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{5} a_k v_k(x_j) + (-1)^j\mu = f(x_j),\ j = 1,2,\ldots,6.$$

Fassen wir die Unbekannten zu einem Vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_5, \mu)^{\mathrm{T}}$, die rechte Seite zu einem Vektor $\mathbf{r} = (f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_6))^{\mathrm{T}}$ und die Koeffizienten zu einer Matrix $\mathbf{A} = (a_{jk})$ mit $a_{jk} = v_k(x_j), k = 1,2,\ldots,5, j = 1,2,\ldots,6$ und $a_{j6} = (-1)^j$ zusammen, so lautet das zu lösende Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{r}$. Mit Hilfe von MATLAB finden wir

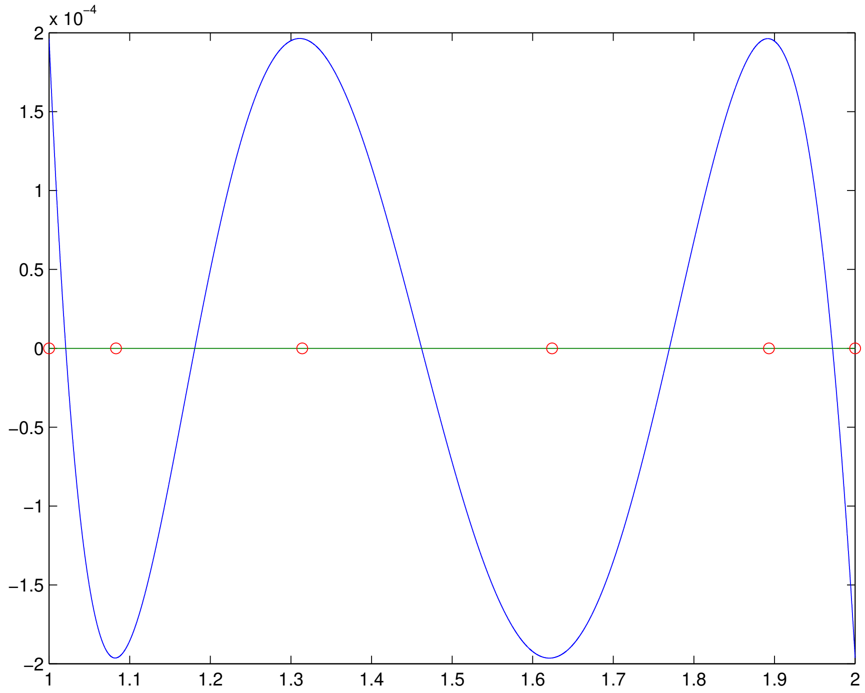

Abbildung L5.1. Fehler der Gamma-Funktion bei Approximation in Π_4

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & 1.0000 & -1.0000 \\ 1.0000 & 1.0830 & 1.1729 & 1.2702 & 1.3757 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.3140 & 1.7266 & 2.2687 & 2.9811 & -1.0000 \\ 1.0000 & 1.6240 & 2.6374 & 4.2831 & 6.9558 & 1.0000 \\ 1.0000 & 1.8930 & 3.5834 & 6.7835 & 12.8411 & -1.0000 \\ 1.0000 & 2.0000 & 4.0000 & 8.0000 & 16.0000 & 1.0000 \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.9584 \\ 0.8954 \\ 0.8964 \\ 0.9594 \\ 1.0000 \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3.09966941067209 \\ -4.46750606279611 \\ 3.37555880751572 \\ -1.18249985082562 \\ 0.17458141099389 \\ -0.00019628444003 \end{pmatrix}.$$

* Daß der Fehler im Vorzeichen alterniert ist ein Vorgriff auf eine noch zu besprechende Theorie.

Für die Minimalabweichung gilt also $\rho_V(f) \leq |\mu| = 1.9628 \cdot 10^{-4}$. (b) Wir bezeichnen das berechnete Polynom mit $\hat{v}$ und fassen die gegebenen Knoten zum Vektor $\mathbf{x}$ zusammen. Dann ist

$$\mathbf{r} - \hat{v}(\mathbf{x}) = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.19628444003050 \\ -0.19628444003050 \\ 0.19628444003095 \\ -0.19628444002961 \\ 0.19628444003217 \\ -0.19628444002784 \end{pmatrix}, \quad ||f - \hat{v}||_\infty = 1.962844 \cdot 10^{-4},$$

wobei das Maximum nur auf den sechs Werten von $\mathbf{x}$ berechnet wurde. Berechnet man das Maximum auf einem äquidistanten Gitter mit 10001 Punkten, so ist $||f - \hat{v}||_\infty = 1.964020^{-4}$ also nur geringfügig größer. Das *Skelett* $\mathbf{x}$ ist also bereits sehr gut. Das erkennt man auch an dem Bild der Fehlerfunktion (Abbildung L5.1, vorige Seite).