# Approximation

Lösungshinweise

Gerhard Opfer SS 2000

## Bogen 4: Ausgabetermin: am 27. April 2000
## Abgabetermin: am 4. Mai 2000 vor den Übungen

**Präsenzaufgaben:**

**Aufgabe P10.** Die beste konstante Approximation von Sinus in $[0, \pi/2]$ ist $c = 0.5$. Wenden Sie darauf das Kolmogoroffkriterium an.

**Lösung.** Sei $f := \sin$, $\hat{v} := 0.5$, $v := a \in \mathbb{R}$. Dann ist die Extremalpunktmenge $E_{\hat{v}} = \{0, \pi/2\}$ und $\min_{t \in E_{\hat{v}}}(f - \hat{v})(t)v(t) = \min\{-0.5a, 0.5a\} \le 0$ für alle $a$. Damit ist das Kolmogoroffkriterium erfüllt und $\hat{v}$ ist b. A. von $f$. Machen wir denselben Test mit einer anderen Konstanten, dann besteht die Extremalpunktmenge nur aus einem Punkt und das Kolmogoroffkriterium ist nicht erfüllt.

**Aufgabe P11.** Können Sie sich ein Beispiel in $(\mathrm{C}(B), \|\ \|_\infty)$ ausdenken, bei dem $E_{\hat{v}}$ nicht endlich ist.

**Lösung.** Sei $B := [-2, 2]$, $V := \langle 1 \rangle$ und

$$f(t) := \begin{cases} -1 & \text{für } t \in [-2, -1], \\ t & \text{für } t \in ]-1, 1[, \\ 1 & \text{für } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Dann ist $\hat{v} := 0$ b. A. von $f$ und $E_{\hat{v}} = [-2, -1] \cup [1, 2]$.

**Aufgabe P12.** Wie war das Argument im Satz von Rivlin & Shapiro mit dem man annehmen kann, daß $E_{\hat{v}}$ endlich ist.

**Lösung.** Zu beweisen ist $\min_{t \in E_{\hat{v}}} \Re\big(\overline{(f - \hat{v})}(t)v(t)\big) \le 0$ für alle $v \in V$. Wird in dem angegebenen Ausdruck $E_{\hat{v}}$ durch eine kleinere Menge ersetzt, so vergrößert sich das Minimum. Kann man die obige Aussage also für eine kleinere Menge beweisen, so ist sie erst recht für $E_{\hat{v}}$ richtig. Ist also $E_{\hat{v}}$ nicht endlich, so kann man $E_{\hat{v}}$ durch eine endliche Teilmenge ersetzen, wenn diese Menge für den Beweis bereits ausreicht.

**Hausaufgaben:**

**Aufgabe 7.** Spüren Sie den Alternativsatz von Gordan in der Literatur auf. Anzugeben sind insgesamt drei Alternativsätze, einer davon von Gordan und die Fundstelle (keine Manuskripte, nur Bücher oder Originalveröffentlichungen).

**Lösung.** Von den nachfolgenden in Paaren (a), (b) auftretenden Gleichungen/Ungleichungen hat jeweils (a) oder (b) eine Lösung, aber niemals (a) und (b) gleichzeitig. Die vorkommenden Matrizen sind reell und nicht notwendig quadratisch. Alle Gleichungen/Ungleichungen sind komponentenweise zu verstehen.
Gale: (a) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, (b) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} = 1$.
Gordan: (a) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$, (b) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} > \mathbf{0}$.
Farkas: (a) $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, (b) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} < 0$.
Stiemke: (a) $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, (b) $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \le \mathbf{0}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} \ne \mathbf{0}$.
Diese Sätze (z. T. mit leichter Modifizierung) findet man z. B. in O. L. MANGASARIAN: Nonlinear Programming, McGraw-Hill, New York, 1969, S. 31–33. Zu achten ist bei MANGASARIAN auf die Unterscheidung zwischen $\mathbf{x} \ge \mathbf{y}$ (mit der zusätzlichen Bedeutung $\mathbf{x} \ne \mathbf{y}$) und $\mathbf{x} \geqq \mathbf{y}$ (S. 14, loc. cit.).

**Aufgabe 8.** Sei $X = \mathrm{C}[-1, 1]$ mit Maximumsnorm (alles reell). (a) Zeigen Sie, daß $V := \{v \in X : \int_{-1}^{1} tv(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ ein Teilvektorraum von $X$ ohne endliche Dimension ist. (b) Zeigen Sie, daß kein $f \notin V$ eine b. A. in $V$ besitzt. (c) Zeigen Sie: $\operatorname{dist}(f, V) = |\int_{-1}^{1} tf(t)|$. (d) Welche algebraische Struktur hat die Menge $M := \{v \in X : \int_{-1}^{1} tv(t)\,\mathrm{d}t = 1\}$.

**Lösung.** (a) Seien $v_1, v_2 \in V \Rightarrow v_1 + v_2 \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}, v \in V \Rightarrow \alpha v \in V$, damit ist $V$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Dieser Vektorraum enthält alle geraden Funktionen, insbesondere $1, x^2, x^4 \ldots$, hat damit keine endliche Dimension.
(b) Es gilt

$$
|\int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t| = |\int_{-1}^{1} t(f-v)(t)\,\mathrm{d}t| \leq \int_{-1}^{1} |t|\,\mathrm{d}t \cdot ||f-v||_\infty = ||f-v||_\infty \text{ für alle } v \in V. \tag{L4.1}
$$

Ist $|(f-v)(t)| < ||f-v||_\infty$ für ein $t \in [-1,1]$, so gilt das wegen der Stetigkeit von $f-v$ auch für eine Umgebung von $t$, in (L4.1) steht dann $|\int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t| < ||f-v||_\infty$. Ist aber $|(f-v)(t)| = ||f-v||_\infty$ für alle $t$, so ist wegen der Stetigkeit $f - v = \text{const}$, also $f \in V$. In (L4.1) steht also für alle $f \in X \backslash V$

$$
|\int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t| < ||f-v||_\infty \text{ für alle } v \in V. \tag{L4.1$'$}
$$

Nach (c) kann dann kein $v \in V$ eine b. A. von $f \in X \backslash V$ sein.
(c) Seien $f \in X \backslash V$, $\rho := \int_{-1}^{1} tf(t)\,\mathrm{d}t$. Wir wollen $|\rho| = \operatorname{dist}(V, f)$ zeigen. Setzen wir $v(t) := f(t) - \rho \operatorname{sign} t$, so ist $\int_{-1}^{1} tv(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t(f(t) - \rho \operatorname{sign} t)\,\mathrm{d}t = \rho - \rho \int_{-1}^{1} |t|\,\mathrm{d}t = 0$ und $|f(t) - v(t)| = |\rho \operatorname{sign} t| = |\rho|$, also auch $||f-v||_\infty = |\rho|$. Da sign nicht stetig ist, sind wir fertig, wenn wir sign durch stetige Funktionen $s$ approximieren können, mit $\int_{-1}^{1} ts(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} t \operatorname{sign}(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Zu $0 < \varepsilon < 1$ und $t \in [-1,1]$ definieren wir daher

$$
\operatorname{sign}_\varepsilon(t) := \frac{3}{3-\varepsilon^2} \begin{cases} \operatorname{sign} t & \text{für } t \notin ]-\varepsilon, \varepsilon[, \\ \frac{t}{\varepsilon} & \text{für } t \in ]-\varepsilon, \varepsilon[. \end{cases} \tag{L4.2}
$$

Offensichtlich sind diese Funktionen stetig und $\operatorname{sign}_\varepsilon(t) \to \operatorname{sign} t$, punktweise wenn $\operatorname{sign} 0 = 0$ gesetzt wird. Weiter gilt $\int_{-1}^{1} t \operatorname{sign}_\varepsilon(t)\,\mathrm{d}t = \frac{3}{3-\varepsilon^2}\big((\int_{-1}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{1}) t \operatorname{sign} t\,\mathrm{d}t + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{t^2}{\varepsilon}\,\mathrm{d}t\big) = \frac{3}{3-\varepsilon^2}\big(1 - \varepsilon^2 + \frac{2}{3}\varepsilon^2\big) = 1$.
(d) Ist $f_0 \in X$ ein spezielle Funktion mit $\int_{-1}^{1} tf_0(t)\,\mathrm{d}t = 1$, so ist $M = V + f_0$, also ein affiner Raum, insbesondere also konvex.