Approximation

Lösungshinweise

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 2: Ausgabetermin: am 13. April 2000

Abgabetermin: am 20. April 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P4. (a) Wiederholen Sie Definitionen von Matrixnorm, (b) Operatornorm, (c) nennen Sie Beispiele, (d) definieren und berechnen Sie $||\mathbf{I}||_{a,b}$. Dabei ist $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix.

Lösung. (a) $||\mathbf{AB}|| \le ||\mathbf{A}||\,||\mathbf{B}||$, für quadratische, gleich große Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$. Beispiele: jede Operatornorm, s. (c), Frobeniusnorm, (b) $||\mathbf{A}||_{a,b} := \sup_{||\mathbf{x}||_a=1} ||\mathbf{Ax}||_b$, dabei bezeichnen $||\ \ ||_a, ||\ \ ||_b$ Normen im Ausgangs- und Bildraum, (c) Spaltensummennorm, Spektralnorm, Zeilensummennorm, (d) $||\mathbf{I}||_{a,b} := \sup_{||\mathbf{x}||_a=1} ||\mathbf{x}||_b$, insbesondere ist $||\mathbf{I}||_{a,a} = 1$. Da Normen im $\mathbb{K}^n$ immer äquivalent sind, gibt es positive Konstanten k, K mit $k||\mathbf{x}||_a \le ||\mathbf{x}||_b \le K||\mathbf{x}||_a$, die angenommen werden können, also $||\mathbf{I}||_{a,b} = K$. Beispiele: $||\mathbf{I}||_{1,\infty} = 1$, $||\mathbf{I}||_{\infty,1} = n$.

Aufgabe P5. (a) Welches Datenquadrupel bestimmt ein Approximationsproblem, (b) was ist ein sinnvolles Approximationsproblem, (c) welches ist die beste konstante Approximation von tan in $[0, \pi/4]$, bei Benutzung der $1, 2, \infty$-Norm.

Lösung. (a) $Q = (X, ||\ \ ||, f, V)$, dabei ist: $(X, ||\ \ ||)$ normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum, $f \in X, V \subset X$, (b) V abgeschlossen, $f \notin V$, (c) $\tan(\pi/8) \approx 0.4142$, $2\log 2/\pi \approx 0.4413$, 0.5.

Aufgabe P6. Bestimmen Sie mithilfe von einfachen Funktionalen untere Schranken für den Minimalabstand bei den Problemen der vorigen Aufgabe.

Lösung. (a) Für den Fall $||\ \ ||_\infty$ ist das Funktional $x^*(x) := 0.5(x(0) - x(\pi/4))$ gut geeignet. Denn es hat die Eigenschaften $||x^*|| = 1, x^*(1) = 0$, daher ist $x^*(\tan) = 0.5(\tan(0) - \tan(\pi/4)) = -0.5$ und $0.5 \le \operatorname{dist}(\tan, V)$. Da die oben gefundene Konstante 0.5 einen Fehler von 0.5 ergibt, ist diese Schranke scharf. D. h. die Konstante 0.5 ist die b. A. (b) Im Falle $X := L_2[0, \pi/4]$ ist $X^* = X$, die Funktionale haben also (im Reellen) die Form $x^*(x) := \int_0^{\pi/4} x(t)\xi^*(t)\,\mathrm{d}t$, sie können also mit gewöhnlichen $L_2[0, \pi/4]$-Funktionen identifiziert werden, und es gilt $||x^*|| = ||\xi^*||$. Das ist i. w. der Inhalt eines bekannten Darstellungssatzes von Fréchet & Riesz, man konsultiere z. B. Taylor & Lay [1980, S. 142].* Die Bedingungen $x^*(1) = \int_0^{\pi/4} \xi^*(t)\,\mathrm{d}t = 0$ und $||x^*|| = 1$ sind im konkreten Fall zu erfüllen. Wählen wir z. B. $\xi^*(t) = -1$, $t \in [0, \pi/8], \xi^*(t) = 1, t \in [\pi/8, \pi/4]$, und setzen wir $x^*(x) := 2/\sqrt{\pi} \int_0^{\pi/4} x(t)\xi^*(t)\,\mathrm{d}t$, so sind diese Bedingungen erfüllt und $x^*(\tan) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(2\log\cos\frac{\pi}{8} + \frac{\log 2}{2}) \approx 0.2124$ liefert eine untere Schranke für $\operatorname{dist}(f, V)$. (c) Im Falle $X := L_1[0, \pi/4]$ ist $X^* = L_\infty[0, \pi/4]$, die Menge der meßbaren, wesentlich beschränkten Funktionen. Eine meßbare Funktion x^* heißt *wesentlich beschränkt*, wenn es eine Konstante c gibt mit: $\{t \in [0, \pi/4] : |x^*(t)| > c\}$ ist eine Nullmenge. Die größte untere Schranke c_0 aller dieser Konstanten ist die in X^* definierte Norm mit der Bezeichnung $c_0 =: ||x^*|| := \operatorname{ess\,sup}_{t\in[0,\pi/4]} |x^*(t)|$. Die Funktionale auf X haben dann die Form

$$x^*(x) := \int_0^{\pi/4} x(t)\xi^*(t)\,\mathrm{d}t \text{ mit } x \in L_1[0, \pi/4],\ \xi^* \in L_\infty[0, \pi/4] \tag{L2.1}$$

und $||x^*||_1 = \operatorname{ess\,sup} |\xi^*(t)|$. Wählen wir $\xi^*(t)$ wie in (b), so ist $||x^*||_1 = 1$ und $x^*(\tan) = 2\log\cos\frac{\pi}{8} + 0.5\log 2 \approx 0.1882$. Mehr Einzelheiten bei Köthe, [1969, S. 142].**

* A. E. Taylor & D. C. Lay: Introduction to Functional Analysis, 2nd. ed., Wiley, New York, 1980, 467 S.

** G. Köthe: Topological Vector Spaces I, Springer, Berlin, 1969, 456 S.

Hausaufgaben:

Aufgabe 3. (a) Bestimmen Sie die besten Approximationen von Sinus und Kosinus auf $[0, \pi/4]$ der Form $\ell(x) := a + bx$ in den Normen $|| \quad ||_2$ und $|| \quad ||_\infty$, und geben Sie in allen Fällen den Fehler, gemessen in der ∞-Norm an. Hinweis: Zur Bestimmung der b. A. ℓ in der $|| \quad ||_\infty$-Norm verwenden Sie, daß für den Fehler $\varepsilon := f - \ell$ gilt: $\varepsilon(x_1) = -\varepsilon(x_2) = \varepsilon(x_3)$, $|\varepsilon(x_1)| = ||\varepsilon||_\infty$ mit $0 \le x_1 < x_2 < x_3 \le \pi/4$. (b) Geben Sie die Datenquadrupel der obigen Approximationsprobleme an. (c) Welcher Fehler ergibt sich für Sinus und Kosinus im Intervall $[0, \pi/2]$ bei Verwendung der Formeln $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$, wenn die obigen b. A. für Sinus und Kosinus verwendet werden. Dabei ist der Fehler immer in der ∞-Norm zu messen. Benutzung eines Computers kann für gewisse Teile der Aufgabe sinnvoll sein.

Lösung. (b) Die vier Datenquadrupel haben mit $X = \mathrm{C}[0, \pi/4]$, $V = \langle 1, x\rangle$ die Form
$Q_1 := (X, || \quad ||_\infty, \sin, V)$, $Q_2 := (X, || \quad ||_\infty, \cos, V)$, $Q_3 := (X, || \quad ||_2, \sin, V)$, $Q_4 := (X, || \quad ||_2, \cos, V)$.
(a1) Zur gleichmäßigen Approximation (also in der $|| \quad ||_\infty$-Norm) von Sinus, nehmen wir an, daß der Fehler an den Endpunkten $0, \pi/4$ gleich groß ist, die Gerade hat also die Form $\ell(x) = a + sx$ mit $s := 2\sqrt{2}/\pi = 0.90031631615711$. Die Größe a und die Zwischenstelle x_2 bestimmen wir aus den beiden Gleichungen $(\sin - \ell)'(x_2) = 0$, $(\sin - \ell)(0) = -(\sin - \ell)(x_2)$. Das ergibt $\cos x_2 = s, x_2 = 0.45030058822622, a = 0.5(\sin x_2 - sx_2) = 0.01491160574948$. Die Größe a ist zugleich die Minimalabweichung.
(a2) Die gleichen Überlegungen bei Kosinus führen auf $\ell(x) = a + sx$ mit $a = 1.03518881131689$, $s = 4/\pi(0.5\sqrt{2} - 1) = -0.37292322857806$, $x_2 = 0.38215753238555$. Die Minimalabweichung ist $a - 1 = 0.03518881131689$.
(a3) Wir müssen $F_3(a, b) := \int_0^{\pi/4} (\sin x - a - bx)^2 \, \mathrm{d}x$ minimieren. Durch partielle Ableitung von F_3 nach a und b gewinnen wir das lineare Gleichungssystem

$$\text{(L2.2)} \qquad \mathbf{Aa} = \mathbf{r} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} := \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} & \frac{\pi^2}{32} \\ \frac{\pi^2}{32} & \frac{\pi^3}{192} \end{pmatrix}, \mathbf{a} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \mathbf{r} := \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 - \frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}, \mathbf{a} := \begin{pmatrix} 0.01568079224579 \\ 0.90971039399156 \end{pmatrix}.$$

(a4) Es ändert sich nur die rechte Seite

$$\text{(L2.3)} \qquad \mathbf{r} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + \pi/4) - 1 \end{pmatrix}, \mathbf{a} := \begin{pmatrix} 1.04829097834114 \\ -0.37681438302307 \end{pmatrix}.$$

Haben wir das allgemeinere, lineare Problem $\Phi(v) := ||f - v||_2 = \min$, mit $v \in V := \langle v_1, v_2, \ldots, v_n\rangle$ mit $\dim V = n$, und fassen wir den $L_2[a, b]$ als Raum mit Skalarprodukt $< f, g >:= \int_a^b f(t)\overline{g(t)} \, \mathrm{d}t$ auf, so haben wir das äquivalente Problem

$$\text{(L2.4)} \qquad F(\mathbf{a}) :=< f - v, f - v >=< f, f > + < v, v > -2\Re < f, v >= \min,$$

wobei $\mathbf{a} := (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}}$ in $v := \sum_{j=1}^n a_j v_j$ vorkommt. Wir erhalten daraus die notwendigen Bedingungen

$$\text{(L2.5)} \qquad \mathbf{Aa} = \mathbf{r} \text{ mit } \mathbf{A} = (< v_j, v_k >), \quad \mathbf{r} = (< f, v_j >),\ j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Man kann diese Gleichungen mit bekannten Mitteln der Analysis, durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen herleiten. Wir werden später eine andere Technik kennenlernen. Insbesondere werden wir zeigen, daß $\mathbf{A}$ immer positiv definit ist. Das Gleichungssystem (L2.5) hat also eine eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{a}$ und diese Lösung minimiert F, definiert in (L2.4). Insbesondere stellt man fest, daß sich bei Approximationen von verschiedenen Funktionen f mit denselben Ansatzfunktionen nur die rechte Seite von (L2.5) ändert.
(c) Wir zeichnen die Fehler von Sinus und Kosinus in je eine Zeichnung (Abbildungen L2.2). Verwendet man die ausgerechneten linearen Funktionen ℓ für $\sin 2x$ und $\cos 2x$ im Intervall $[\pi/8, \pi/4]$ unter Verwendung der angegebenen Formeln, so daß Sinus und Kosinus in $[\pi/4, \pi/2]$ definiert sind, so verdoppelt sich der Fehler etwa, und es gibt eine Unstetigkeitsstelle bei $x = \pi/4$.

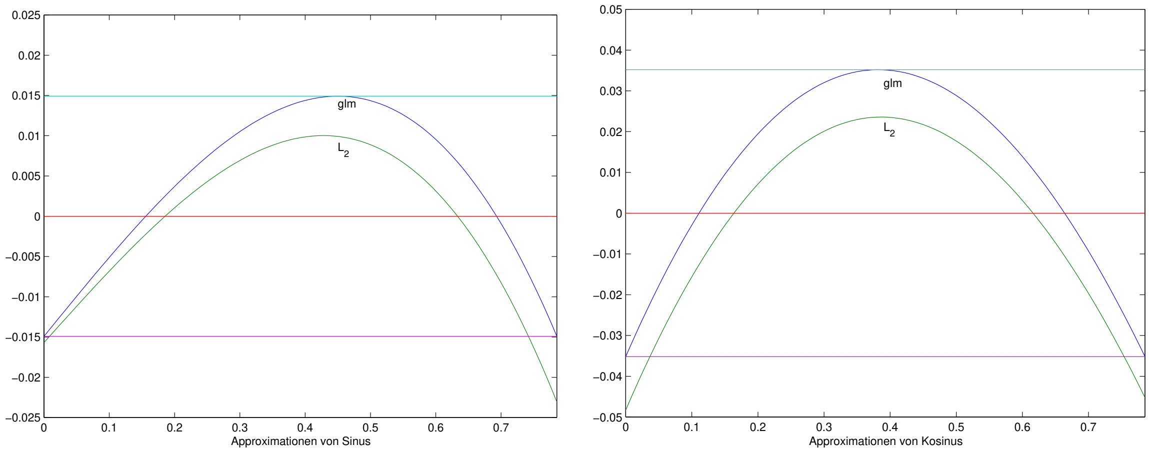

Abbildung L2.1: Fehler der gleichmäßigen und L_2-Approximation von Sinus und Kosinus durch Geraden

Aufgabe 4. (a) Bestimmen Sie die b. A. von $f(z) := z^3$ durch eine (möglicherweise komplexe) Konstante auf dem Dreieck $D := \{z_1, z_2, z_3\} := \{0, 1, \mathrm{i}\}$, d. h. auf den drei angegebenen Ecken unter Verwendung der Tschebyscheff-Norm. (a1) Wie sieht das entsprechende Datenquadrupel aus. Hinweis: Versuchen Sie die Konstante c so zu bestimmen, daß $|c - z_1^3| = |c - z_2^3| = |c - z_3^3|$, also $|c| = |c - 1| = |c + \mathrm{i}|$ gilt. (b) Welche Form haben die linearen Funktionale x^* in diesem Fall, und welche Form hat $x^*(f)$. (b1) Zeigen Sie, daß der obige Ansatz tatsächlich eine b. A. $\hat{c}$ liefert, indem Sie ein Funktional x^* finden mit $|x^*(f)| = ||f - \hat{c}||_\infty$.

Lösung. (a1) $Q = (\mathrm{C}(D), ||\quad||_\infty, z^3, \langle 1 \rangle)$. Dabei ist zu beachten, daß $X := \mathrm{C}(D)$ mit der Menge aller Funktionen auf D übereinstimmt, und daß es nur endlich viele linear unabhängige Funktionen, nämlich drei geben kann. (a) Die beste Konstante ist $\hat{c} = 0.5(1 - \mathrm{i})$, der Minimalabstand ist $\mathrm{dist}(f, V) = 0.5\sqrt{2}$. Er wird an allen drei Eckpunkten angenommen. Man kann dazu die drei Gleichungen $|c| = |c - 1| = |c + \mathrm{i}| = r > 0$ auffassen als drei Kreise mit dem gleichen Radius r und den Mittelpunkten $0, 1, -\mathrm{i}$. Gesucht ist dann ein Radius r, so daß alle drei Kreise einen gemeinsamen Schnittpunkt haben. (b) Für das obige f sei $x^*(f) = \lambda_1 f(z_1) + \lambda_2 f(z_2) + \lambda_3 f(z_3) = \lambda_2 - \lambda_3 \mathrm{i}$ mit $|\lambda_1| + |\lambda_2| + |\lambda_3| = 1$ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Andere Funktionale kann es offenbar nicht geben. Wir müssen die λ_j so bestimmen, daß $|x^*(f)| = |\lambda_2 - \lambda_3 \mathrm{i}|$ möglichst groß wird. Setzen wir $\lambda_1 = 0$, so ist $\lambda_2 = -\lambda_3$ und $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 0.5$, also $|x^*(f)| = |\lambda_2 + \lambda_2 \mathrm{i}| = |1 + \mathrm{i}| 0.5 = 0.5\sqrt{2} = \mathrm{dist}(f, V)$. Die obige Konstante $\hat{c}$ ist also b. A.