Approximation

Lösungshinweise

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 1: Ausgabetermin: am 6. April 2000
Abgabetermin: am 13. April 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P1. (a) Welches sind die Axiome für eine Norm. (b) Wie ist Konvexität definiert. (c) Wie ist ein metrischer Raum definiert. (d) Wie ist ein Raum mit Skalarprodukt definiert. (e) In einem Raum mit Skalarprodukt gilt der Satz des Pythagoras. Wie lautet er. Leiten Sie ihn her.

Lösung. X ist in (c) eine Menge, sonst ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. (a) $|| \quad || : X \to \mathbb{R}$ mit (i) $||x|| \neq 0$ für $x \neq 0$, (ii) $||\alpha x|| = |\alpha|\,||x||, x \in X, \alpha \in \mathbb{K}$, (iii) $||x+y|| \le ||x|| + ||y||$. (b) Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt *konvex*, wenn $x, y \in K, \lambda \in [0,1] \Rightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in K$. (c) Die Abbildung $\rho : X \times X : \mathbb{R}_{\ge} := \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0\}$ heißt *Metrik*, wenn für alle x, y, z gilt: (i) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, (ii) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$, (iii) $\rho(x,y) = \rho(x,z) + \rho(z,y)$. (d) Es existiert Abbildung $< \quad , \quad >: X \times X \to \mathbb{K}$ mit (i) $< x+y, z >=< x,z > + < y,z >, x,y,z \in X$, (ii) $< \alpha x, y >= \alpha < x,y >, x,y \in X, \alpha \in \mathbb{K}$, (iii) $< x,y >= \overline{< y,x >}, x,y \in X$, (iv) $< x,x >> 0$ für alle $x \neq 0$. (e) Sei $x \perp y$, also $< x,y >= 0$. Dann ist $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ (Pythagoras), denn $||x+y||^2 =< x+y, x+y >=< x,x > + < y,y >= ||x||^2 + ||y||^2$.

Aufgabe P2. (a) Nennen Sie spezielle Normen im $\mathbb{K}^n$. (b) Wie sehen die entsprechenden Einheitskugeln für $n = 2$ aus. (c) Wie lautet das übliche Skalarprodukt. (d) Welches sind die entscheidenden Ungleichungen für die p-Normen.

Lösung. (a) $||x||_p = \left\{\sum_{j=1}^n |x_j|^p\right\}^{1/p}$, $p \ge 1$; $||x||_\infty = \max_{1\le j\le n} |x_j|$. (b) In Figur L1.3. am Schluß. (c) $X = \mathbb{R}^n :< x,y >:= \sum_{j=1}^n x_j y_j$, $X = \mathbb{C}^n :< x,y >:= \sum_{j=1}^n x_j \overline{y_j}$. (d) Höldersche Ungleichung für $p, q \ge 1$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ im $\mathbb{K}^n : \sum_{j=1}^n |x_j y_j| \le ||x||_p ||y||_q$, Minkowskische Ungleichung: $||x+y||_p \le ||x||_p + ||y||_p, p \ge 1$, Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in Räumen mit Skalarprodukt (z. B. $p = 2$): $| < x,y > | \le ||x||\,||y||$, Gleichhheit genau dann, wenn x, y linear abhängig.

Aufgabe P3. (a) Nennen Sie Normen in Funktionenräumen. (b) Geben Sie ein Skalarprodukt in einem Funktionenraum an.

Lösung. (a) $||x||_p = \left\{\int_{\mathbb{R}^n} |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right\}^{1/p}$ für $x \in X := \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$, $p \ge 1$; $||x||_\infty = \max_{t \in B} |x(t)|$, $x \in X := \mathrm{C}(B), B$ kompakt. (b) $x, y \in X := \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^n) :< x,y >:= \int_{\mathbb{R}^n} x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t$.

Hausaufgaben:

Aufgabe 1. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer *Quasinorm* $|| \quad || : X \to \mathbb{R}_{\ge}$ definiert durch
  i) $||x|| \neq 0$ für alle $x \neq \mathbf{0}$,
  ii) $||\alpha x|| = |\alpha|||x||$ für alle $x \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$.
Sei $K := \{x : ||x|| \le 1\}$ die Einheitskugel in X. Zeigen Sie: Die Einheitskugel ist genau dann konvex, wenn die Quasinorm eine Norm ist.

Lösung. (a) Seien $|| \quad ||$ eine Norm und $x, y \in K$. Dann ist $z := (1-\lambda)x + \lambda y \in K$ für $\lambda \in [0,1]$, denn nach der Dreiecksungleichung ist $||z|| \le (1-\lambda)||x|| + \lambda||y|| \le (1-\lambda) + \lambda = 1$. (b) Sei K konvex und $x, y \in X$. Ist $x = 0$ oder $y = 0$, so gilt die Dreiecksungleichung (mit Gleichheit). Sei daher $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann sind $\frac{x}{||x||}, \frac{y}{||y||} \in K$ und wegen der Konvexität von K ist

$$z := \frac{||x||}{||x|| + ||y||}\frac{x}{||x||} + \frac{||y||}{||x|| + ||y||}\frac{y}{||y||} \in K,$$

also $||z|| = \frac{||x+y||}{||x||+||y||} \le 1$, also gilt die Dreiecksungleichung.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $(X, < \ , \ >)$ mit Skalarprodukt die Parallelogrammgleichung

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \tag{1.1}$$

gilt. (b) Zeigen Sie, daß ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum in dem die Parallelogrammgleichung (1.1) gilt ein Raum mit Skalarprodukt ist. Konstruieren Sie dieses Skalarprodukt. Hinweis: Behandeln Sie zuerst den reellen Fall. Zeigen Sie, daß im komplexen Fall wegen der Linearität in der ersten Komponente aus $< \mathrm{i}x, y > = \mathrm{i} < x, y >$ folgt: $\Im < x, y > = -\Re < \mathrm{i}x, y >$. Dabei Ist $\Re, \Im$ der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl. [(a) ein Punkt, (b) 3 Punkte]

Lösung. (a) $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = < x+y, x+y > + < x-y, x-y > = < x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y > + < x, x > - < x, y > - < y, x > + < y, y > = 2(||x||^2 + ||y||^2)$. (b) Gelte (1.1). In einem Raum mit Skalarprodukt gilt $||x+y||^2 - ||x-y||^2 = < x+y, x+y > - < x-y, x-y > = 4\Re < x, y >$. In einem reellen Raum muß das Skalarprodukt daher notwendig die Form haben:

$$f(x,y) := \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2). \tag{L1.1}$$

Wir zeigen, daß dieses f unter Benutzung von (1.1) tatsächlich ein Skalarprodukt für den reellen Fall ist.

i) Wir beweisen die Additivität von f in der ersten Komponente. Sei
$A(x,y,z) := \frac{1}{2}||x+y+z||^2$. Dann ist nach der Parallelogrammgleichung
$A(x,y,z) = ||x+z||^2 + ||y||^2 - \frac{1}{2}||x-y+z||^2$ und daher
$A(x,y,z) - A(x,y,-z) = ||x+z||^2 - \frac{1}{2}||x-y+z||^2 - ||x-z||^2 + \frac{1}{2}||x-y-z||^2$.
Vertauschen wir x und y, so kommt dasselbe heraus, also
$A(x,y,z) - A(x,y,-z) = ||y+z||^2 - \frac{1}{2}||y-x+z||^2 - ||y-z||^2 + \frac{1}{2}||y-x-z||^2$.
Addieren wir diese beiden Gleichungen, so erhalten wir wegen $2f(x+y,z) = A(x,y,z) - A(x,y,-z)$ die Gleichung
$4f(x+y,z) = ||x+z||^2 - ||x-z||^2 + ||y+z||^2 - ||y-z||^2 = 4f(x,z) + 4f(y,z)$.

ii) $f(x,y) = f(y,x)$ folgt sofort aus der Definition (L1.1),

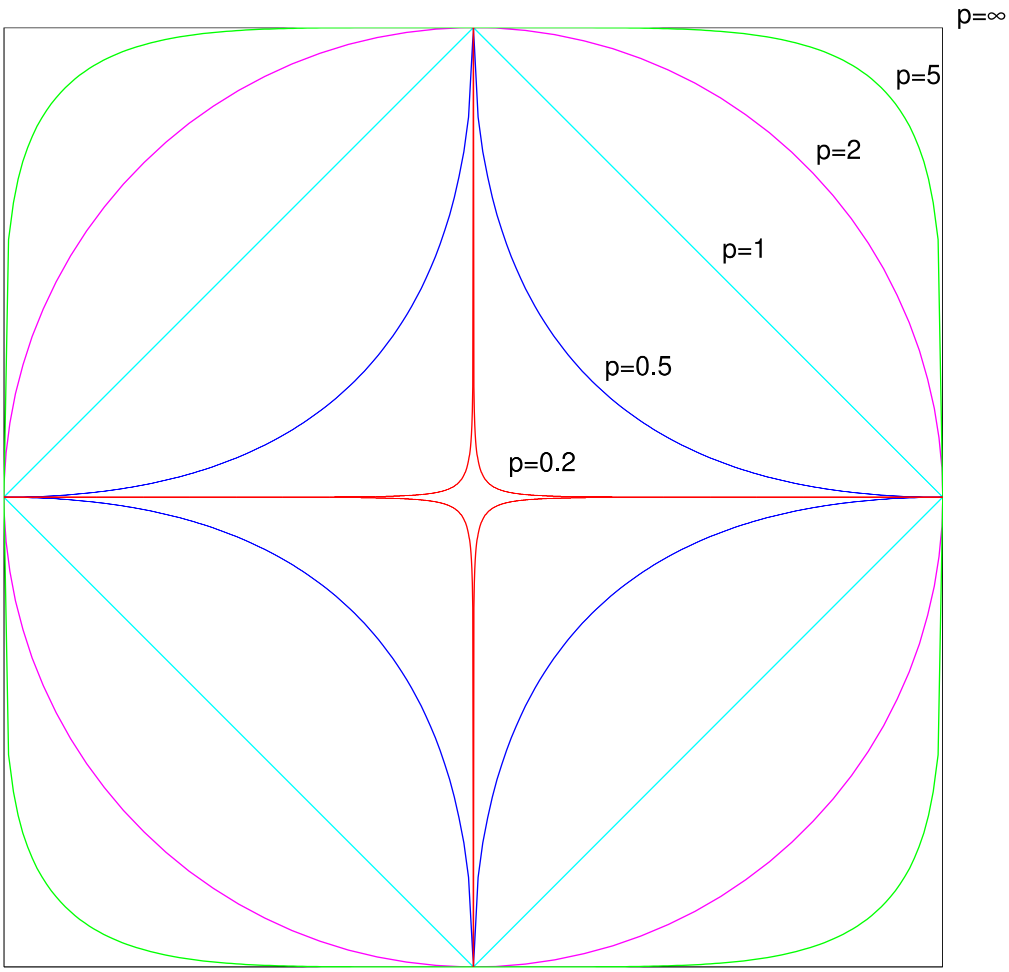
iii) $f(x,x) = \frac{1}{4}||x+x||^2 = ||x||^2 > 0$ für $x \neq 0$, unmittelbar aus (L1.1),

iv) für natürliche n gilt wegen (i) sofort $f(nx,y) = nf(x,y)$, und daher auch $f(x,y) = f(n\frac{x}{n}, y) = nf(\frac{x}{n}, y)$ und somit $\frac{1}{n}f(x,y) = f(\frac{x}{n}, y)$, es gilt also $f(\alpha x, y) = \alpha f(x,y)$ für alle rationalen α. Da Normen stetig sind, ist auch f aus (L1.1) stetig, und $f(\alpha x, y) = \alpha f(x,y)$ gilt auch für $\alpha \in \mathbb{R}$.

Im komplexen Fall ist, wie wir gesehen haben, $f(x,y) = \Re < x, y >$ der Realteil des gesuchten Skalarprodukts. Sei $< x, y > = f(x,y) + \mathrm{i}g(x,y)$. Aus $< x, \mathrm{i}y > = -\mathrm{i} < x, y > = -\mathrm{i}f(x,y) + g(x,y) = f(x, \mathrm{i}y) + \mathrm{i}g(x, \mathrm{i}y)$ folgt $g(x,y) = f(x, \mathrm{i}y)$ und daher erhalten wir notwendig

$$< x, y > = f(x,y) + \mathrm{i}f(x, \mathrm{i}y). \tag{L1.2}$$

Auch in diesem Fall müssen die Axiome für das Skalarprodukt nachgewiesen werden. (i) Da f in der ersten Komponente additiv ist, folgt dasselbe auch für das Skalarprodukt aus (L1.2). (iv) Um die Homogenität zu prüfen, genügt der Nachweis von $< \mathrm{i}x, y > = \mathrm{i} < x, y >$, da für reelle Faktoren der Nachweis schon geführt wurde. Aus (L1.1) folgt $f(x, \mathrm{i}y) = -f(\mathrm{i}x, y)$ und weiter $< \mathrm{i}x, y > = f(\mathrm{i}x, y) + \mathrm{i}f(\mathrm{i}x, \mathrm{i}y) = -f(x, \mathrm{i}y) + \mathrm{i}f(x,y) = \mathrm{i} < x, y >$. (ii) Es ist $< y, x > = f(y,x) + \mathrm{i}f(y, \mathrm{i}x) = f(x,y) - \mathrm{i}f(x, \mathrm{i}y)$, also $< y, x > = \overline{< x, y >}$. (iii) Wegen $f(x, \mathrm{i}x) = 0$ ist $< x, x > = ||x||^2$. Damit sind alle Axiome nachgewiesen.



Figur L1.3. Einheitskugeln im $\mathbb{R}^2$ für verschiedene Werte von p