Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 12: Ausgabetermin: am 6. Juli 2000

Abgabetermin: am 13. Juli 2000 vor den Übungen

Sei $S_n := \langle B_{1k}, B_{2k}, \dots B_{nk}\rangle$ ein n-dimensionaler Splineraum der Ordnung k zu einer beliebigen (nicht fallenden) Knotenfolge t_j, $j = 1, 2, \dots, n+k$ mit $t_j < t_{j+k}$ für alle $j = 1, 2, \dots, n$. Seien τ_j, $j = 1, 2, \dots, n$ vorgegebene Interpolationsknoten mit $\tau_j \le \tau_{j+1}$ wobei jeder Knoten τ_j höchsten die Vielfachheit $\#\tau_j = k-1$ besitzen darf. Zu den Interpolationsknoten definieren wir einen ganzzahligen Vektor d der Länge n folgendermaßen:

(12.1) $$[d_j, d_{j+1}, \dots, d_{j+\#\tau_j-1}] = [0, 1, 2, \dots, \#\tau_j - 1] \text{ falls } j = 1 \text{ oder } \tau_{j-1} < \tau_j \text{ für } j \ge 2.$$

Sind alle Knoten einfach, so ist d der Nullvektor, sind alle Knoten doppelt, so ist $d = (0, 1, 0, 1 \dots, 0, 1)$. Dann interessieren wir uns bei beliebig vorgegebenen Zahlen s_j, $j = 1, 2, \dots, n$ für die Lösbarkeit des Interpolationsproblems

(12.2) $$s^{(d_j)}(\tau_j) = s_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad s \in S_n.$$

Wir müssen dabei noch eine natürliche Einschränkung vornehmen. Ist τ_κ ein Splineknoten t_j, so muß $t_j < t_{j+k-\#\tau_\kappa}$ gelten, d. h. am Knoten t_j muß man auch entsprechend oft differenzieren können. Bei $\#\tau_\kappa = 1$ bedeutet das, daß der Spline am Knoten t_j wenigstens stetig sein muß. Die Frage der Lösbarkeit läuft darauf hinaus ob die Matrix

(12.3) $$M := B_{j,k}^{(d_\kappa)}(\tau_\kappa),\ j, \kappa = 1, 2, \dots, n$$

nicht singulär ist.

Satz 12.1. (Schoenberg & Whitney) Die in (12.3) definierte Matrix M ist genau dann nicht suingulär, wenn

(12.4) $$t_j < \tau_j < t_{j+k} \text{ für alle } j = 1, 2, \dots, n.$$

Diese Bedingung (12.4) ist äquivalent zu $B_{j,k}^{(d_j)}(\tau_j) \ne 0$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P34. Bestimmen Sie die Splineknoten in Aufgabe 23 unter Beachtung des Satzes von Schoenberg & Whitney.

Aufgabe P35. Berechnen Sie die verschiedenen Kenngrößen der Kurve $\mathbf{x} := (\cos t, \sin t, t), t \in [0, 10\pi]$. Wie sieht die Kurve aus? Wie lang ist die Kurve etwa?

Aufgabe P36. Was hätten Sie in der Vorlesung oder Übung gern anders gesehen, Behandlung anderer Themen, ausführlichere oder weniger ausführliche Behandlung bestimmter Themen. Offensichtlich sind numerische Aufgaben nicht gern gesehen, warum ist das so?

Hausaufgaben:

Aufgabe 23. Lösen Sie das Interpolationsproblem $s(\tau_{2j-1}) = s_{2j-1}$, $s'(\tau_{2j}) = s_{2j}, j = 1, 2, \dots, 7$ auf dem Intervall $[a, b] := [0.05, 0.4]$ mit $\tau_1 := a, \tau_3 := 0.06, \tau_5 := 0.075, \tau_7 := 0.09, \tau_9 := 0.13, \tau_{11} = 0.21, \tau_{13} := b$, mit $\tau_{2j} = \tau_{2j-1}$, $j = 1, 2, \dots, 7$. Die sieben Interpolationsknoten τ_j sind also als doppelt aufzufassen. Die Werte und Ableitungen sind zu berechnen aus $s_{2j-1} := f(\tau_{2j-1}), s_{2j} := f'(\tau_{2j}), j = 1, 2, \dots, 7$ mit $f(t) := t\sin(1/t)$. Verwenden Sie zur Interpolation einen kubischen Spline $s \in \langle B_{1,4}, B_{2,4}, \dots, B_{14,4}\rangle$ mit den Splineknoten $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = a < t_5 \le \dots \le t_{14} < t_{15} = t_{16} = t_{17} = t_{18} = b$ und verwenden Sie die Interpolationsknoten soweit wie möglich auch als (doppelte) Splineknoten $t_j, j = 1, 2, \ldots, 18 = n + 4$. Beachten Sie dabei die Bedingungen (12.4) des Satzes von Schoenberg & Whitney für die Ordnung $k = 4$. Als Lösung zeichnen Sie s und f über $[a, b]$ in eine einzige Zeichnung. Von der Matrix $M := B_{j,4}^{(d_k)}(\tau_k),\ j, k = 1, 2, \ldots, 14$ geben Sie bitte den oberen linken 4×4-Ausschnitt an und die ersten vier Koeffizienten $a_1, \ldots, a_4$ in der Darstellung $s = \sum_{j=1}^{14} a_j B_{j,4}$, in MATLAB-Format *short* (4 Stellen nach dem Komma).

Aufgabe 24. Berechnen Sie das begleitende Dreibein, die Bogenlänge, die Gesamtlänge, die Krümmung und die Torsion der folgenden Kurve (Spiralfeder, s. Abb. 12.1) $\mathbf{x} : [-a, a] \to \mathbb{R}^3$ mit $a = 10\pi$ und

$$\mathbf{x} := \frac{1}{a}\begin{cases} (a-t)\cos t, \\ (a-t)\sin t, \\ \qquad\qquad t. \end{cases} \tag{12.5}$$

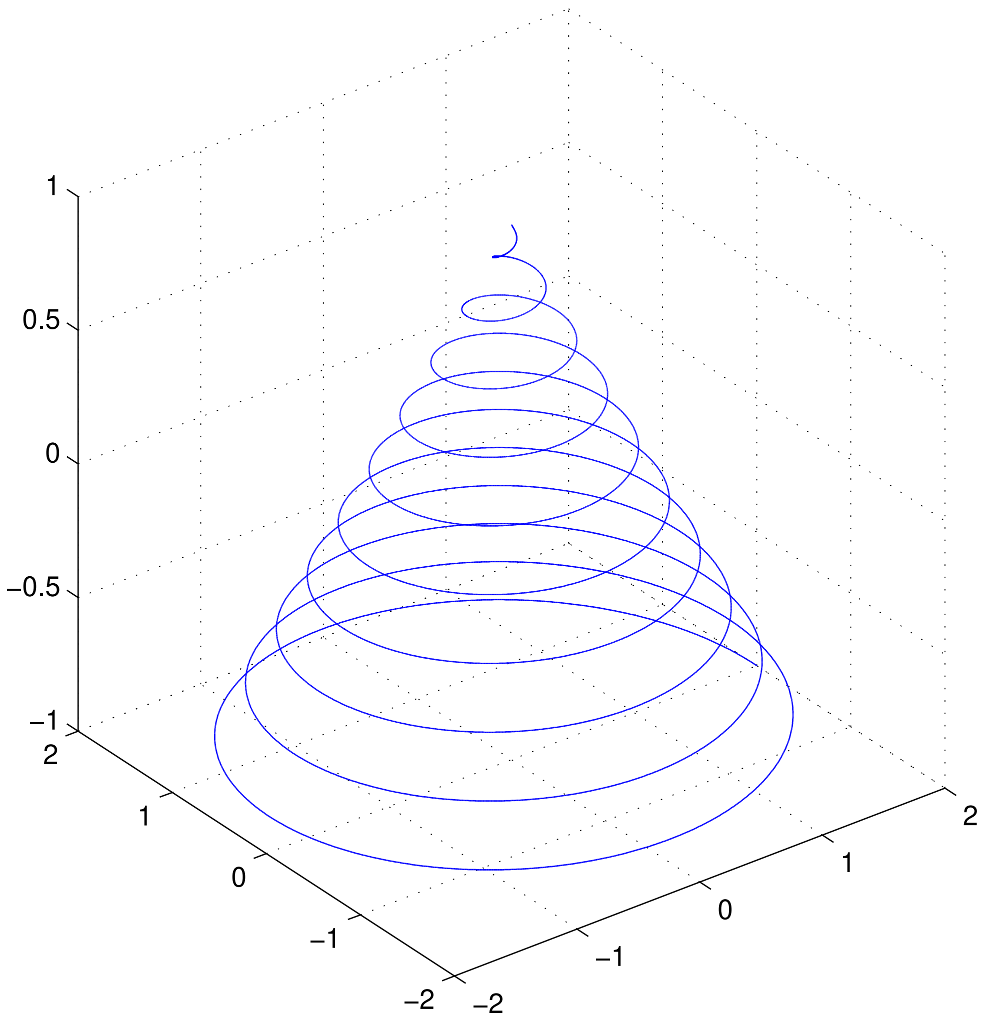

Abb. 12.1. Spiralfeder (12.5)

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Interpolation mit Splines an beliebigen auch mehrfachen Knoten (Hermite-Interpolation), Satz von Schoenberg & Whitney zur Frage der Lösbarkeit dieses Interpolationsproblems.
Elementare Begriffe aus der Differentialgeometrie wie Kurve, reguläre Kurve, Pfad oder Spur einer Kurve, Parametrisierung einer Kurve, Bogenlänge, Geschwindigkeit, Tangente, Binormale, Hautptnormale, begleitendes Dreibein oder Frenetscher Rahmen, Formeln von Frenet (oder Frenet & Serret), Krümmung, Torsion einer Kurve.

`(version of 5. 7. 2000 at 895 minutes since midnight)`