Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 11: Ausgabetermin: am 29. Juni 2000

Abgabetermin: am 6. Juli 2000 vor den Übungen

Eine Funktion der Form $\phi(x) := \varphi(||x||), x \in \mathbb{R}^m$ heißt eine *radiale Funktion*. Die Norm ist dabei die euklidische Norm. Sind $x_j,\ j = 1, 2, \dots, n$ paarweise verschiedene Knoten in $\mathbb{R}^m$, so betrachten wir den Vektorraum

$$S := \langle \phi(x - x_1), \phi(x - x_2), \dots, \phi(x - x_n) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^m. \tag{11.1}$$

Elemente in S nennt man *radiale Splines*. Beispiele für φ sind: (a) $\varphi(r) = r$, (b) $\varphi(r) = \exp(-\alpha r^2)$ mit $\alpha > 0$ und $r = ||x||$. Das Interpolationsproblem wird dann in der Form

$$s(x_j) = s_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad s \in S \tag{11.2}$$

mit vorgegebenen s_j gestellt. Die Basisfunktionen hängen also - und das ist neu hier - von den Knoten ab. Ob das Interpolationsproblem gelöst werden kann, hängt ab von der Nicht-Singularität der Matrix $M = (\phi(x_j - x_k))_{j,k=1}^n$ ab. Für die beiden genannten Fälle ist die Matrix M nicht singulär. Die Beweise sind trickreich mit Benutzung von Integraltransformationen. Im Fall (a) wird folgender Satz benutzt: Ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \le 0$ für alle $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)^{\mathrm{T}}$ mit $\sum x_j = 0$ und $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ nur für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, so sind mit genau einer Ausnahme alle Eigenwerte von $\mathbf{A}$ negativ. In manchen Fällen muß die obige Bedingung (11.2) leicht modifiziert werden zu

$$s(x_j) + p(x_j) = s_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad s \in S. \tag{11.2$'$}$$

Dabei ist p ein Polynom (in m Veränderlichen) höchstens vom Grad Zwei, in vielen Fällen ist $p = 0$. Dabei müssen dann noch einige zusätzliche Bedingungen gestellt werden, damit die Anzahl der Bedingungen mit der Anzahl der Unbekannten übereinstimmt. Ist z. B. $p \in \Pi_1$, so enthält p gerade $m + 1$ Parameter. Ist $m = 1$, so erhält man für den Fall (a) die üblichen linearen Splines und für (c) $\varphi(r) = r^3$ die kubischen Splines. Für $\varphi(r) = r^2$ klappt das Konzept nicht, da dann $\phi(x)$ ein Polynom ist.
Wir kommen zu den Splines zurück. Ist $s = \sum_j a_j B_{jk}$, so lautet die Berechnungsvorschrift von $s(t)$ für $t \in [t_\ell, t_{\ell+1}[$ folgendermaßen (der obere Index an den a's ist eine Numerierung, keine Potenz):

$$a_j^0 := a_j, \quad j = \ell - k + 1, \dots, \ell, \tag{11.3a}$$

$$a_j^{r+1} := (1 - \omega_{j,k-r})a_{j-1}^r + \omega_{j,k-r}a_j^r, \quad j = \ell - k + r + 2, \dots, \ell, \quad r = 0, 1, 2, \dots, k - 2, \tag{11.3b}$$

$$s = a_\ell^{k-1}. \tag{11.3c}$$

Aus (11.3b) folgt, daß die Polynome a_j^{r+1} stabil berechnet werden können, da die Summe rechts in (11.3b) eine Konvexkombination ist. Das Argument t geht über die ω in die Berechnung ein. Die Koeffizienten der Ableitung $s' = \sum_j a_j' B_{j,k-1}$ ergeben sich aus:

$$a_j' = (k - 1)\frac{a_j - a_{j-1}}{t_{j+k-1} - t_j}, \quad \text{falls } t_j < t_{j+k-1}. \tag{11.4}$$

Ist die in (11.4) angegebene Bedingung nicht erfüllt, so ist $B_{j,k-1} = 0$ und der gegebene Spline s nicht differenzierbar bei t_j. Will man die Werte (oder die Koeffizienten der Ableitung) eines einzigen B-Splines mit der Nummer ℓ berechnen, so wähle man die Koeffizientenfolge $a_j = \delta_{j\ell},\ j \in \mathbb{Z}, \ell$ fest vorgegeben.

b. w.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P31. Wieviele Operationen braucht man, um einen Spline $s = \sum_j a_j B_{jk}$ der Ordnung k an einer vorgegebenen Stelle $t \in \mathbb{R}$ auszuwerten?

Aufgabe P32. Dieselbe Frage für die Ableitung s'.

Aufgabe P33. Unter welchen Bedingungen an die Interpolationsknoten τ_j kann das Interpolationsproblem für $s \in \langle B_{1k}, B_{2k}, \ldots, B_{nk}\rangle$ gelöst werden?

Hausaufgaben:

Aufgabe 21. Seien B_{j2} die linearen B-Splines zu einer einfachen Knotenfolge $\mathbf{t}$ und (a) $\tau_j = 0.5(t_j + t_{j+1})$. Bestimmen Sie die Matrix $M = B_{j2}(\tau_k),\ j,k = 1,2,\ldots,n$ und zeigen Sie, daß sie nicht singulär ist. (b) Zeigen Sie, daß die letzte Aussage richtig bleibt, wenn die $\tau_j \in]t_j, t_{j+1}[$ gewählt werden. (c) Bestimmen Sie eine n-elementige Teilmenge von $\mathbf{t}$ als Interpolationsknoten τ, für die das Interpolationsproblem in $\langle B_{1k}, B_{2k}, \ldots B_{nk}\rangle$ lösbar ist.

Aufgabe 22. Bestimmen Sie die zur Knotenfolge $\mathbf{t} := \{\ldots, -1, -1, 0, 1, 1, \ldots,\}$ gehörenden B-Splines.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Vorlesung am Donnerstag von Professor Will Light, Leicester, England, im Rahmen des Sokrates-Programms. Thema: Radiale Basis-Splines. Es wird neben einer Einführung und Motivation gezeigt, daß die oben definierte Matrix M in den beiden Fällen (a) und (b) nicht singulär ist. Im Fall (a) wird eine Integraltransformation zur Berechnung von $\sqrt{t}$ benutzt, und im Fall (b) stützt man sich darauf, daß die Fouriertransformierte einer Glockenkurve wieder eine Glockenkurve ist. Einige Details weiter vorn auf diesem Blatt.
Thema Splines (Montag): Rekursive Berechnung von $s = \sum a_j B_{j,k}$ an einer vorgegebenen Stelle und Berechnung der Koeffizienten von $s' = \sum a_j' B_{j,k-1}$ mit Spezialisierung auf kardinale Splines und Bernstein-Polynome (als Splines mit Knotenfolge ...0011...), Faltungsintegral und Darstellung der kardinalen Splines k-ter Ordnung als k-fache *Faltung* der Splines erster Ordnung. Auswertungsalgorithmus von de Casteljau im Fall der Bernsteinpolynome.

`(version of 28. 6. 2000 at 1314 minutes since midnight)`