Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 10: Ausgabetermin: am 22. Juni 2000
Abgabetermin: am 29. Juni 2000 vor den Übungen

Aus der Darstellung (9.3a) der Potenzen $(t-\tau)^{k-1}$ erhält man sofort die Darstellung der *abgeschnittenen Potenzen*, (engl. *truncated powers*)

$$(t-\tau)_+^0 := \begin{cases} 1 & t \geq \tau, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (t-\tau)_+^k := (t-\tau)^k (t-\tau)_+^0, \quad k \geq 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

nämlich

$$(t-t_\ell)_+^{k-1} = \sum_{j \geq \ell} \psi_{jk}(t_\ell) B_{jk}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10.1}$$

Setzt man unter Benutzung der Definition (9.3b)

$$\psi_{jk}^+(\tau) := \begin{cases} \psi_{jk}(\tau) & \text{für } \tau \geq \tau_j \text{ mit } \tau_j \in]t_j, t_{j+k}[, \\ 0 & \text{für } \tau < \tau_j, \end{cases} \tag{10.2}$$

dann hat (10.1) auch die Form

$$(t-t_\ell)_+^{k-1} = \sum_{j} \psi_{jk}^+(t_\ell) B_{jk}(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{10.3}$$

Wegen $t_j < \tau_j$ in (10.2) ist $\psi_{jk}^+(t_\ell) = 0$ für alle $\ell \leq j$. Wegen $t_{j+k} > \tau_j$ ist $\psi_{jk}^+(t_\ell) = \psi_{jk}(t_\ell)$ für alle $\ell \geq j+k$. Außerdem ist nach der Definition von ψ_{jk} auch $\psi_{jk}(t_\ell) = 0$ für $\ell = j+1, j+2, \ldots, j+k-1$. Insgesamt ist also $\psi_{jk}^+(t_\ell) = \psi_{jk}(t_\ell)$ für $\ell \geq j+1$ und $\psi_{jk}^+(t_\ell) = 0$ für $\ell \leq j+k-1$.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P28. Seien S die sp-Funktionen der Ordnung k mit Knotenfolge $\mathbf{t}$ und $\mathbb{S}_{k,\mathbf{t}}$ der von den B-Splines aufgespannte Raum. Offensichtlich ist $S_{k,\mathbf{t}} \subset S$. Welche Elemente von S liegen in $S_{k,\mathbf{t}}$?

Aufgabe P29. (a) Was ist die Kondition einer Basis? (b) Wie kann man die Kondition der beiden Basen (i) $1, t$, (ii) $1, t-a$ auf dem Intervall $[a,b]$ vergleichen. Man behandele das Beispiel $[a,b] = [100, 101]$.

Aufgabe P30. Was sind radiale Splines?

Hausaufgaben:

Aufgabe 19. Seien $p \in \Pi_n$, $x \in [a,b]$. Beweisen Sie die folgende Ungleichung von A. A. Markov (1889):

$$|p'(x)| \leq \frac{2n^2}{b-a} ||p||_\infty \quad \text{mit} \quad ||p||_\infty := \max_{x \in [a,b]} |p(x)|. \tag{10.4}$$

Hinweis: Man kann zeigen, daß Gleichheit in (10.4) genau für das Tschebyscheffpolynom T_n angenommen wird. Es ist daher zweckmäßig, in (10.4) eine Transformation auf das Intervall $[-1,1]$ vorzunehmen und Polynome mit $||p||_\infty \leq 1$ zu betrachten. Durch wiederholte Anwendung von (10.4) ergibt sich sofort eine Abschätzung für $|p^{(j)}(x)|$, $j > 1$, die aber zu pessimistisch ist. Eine bessere Abschätzung von $|p^{(j)}(x)|$, $j > 1$ stammt von V. A. Markov (1916), einem Bruder von A. A. Markov. Man beweise ggf. (für die halbe Punktzahl) die Existenz einer Konstanten c_n mit

$$|p'(x)| \leq \frac{c_n}{b-a} ||p||_\infty \quad \text{mit} \quad ||p||_\infty := \max_{x \in [a,b]} |p(x)|. \tag{10.4'}$$

Aufgabe 20. Zeigen Sie, daß sich aus der Darstellung (10.3) die bekannte Formel

$$B_{jk}(t) = q[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}](t_{j+k} - t_j), \quad t \in \mathbb{R} \tag{10.5}$$

für B-Splines ergibt, wobei $q[t_j, t_{j+1}, \ldots, t_{j+k}]$ die k-te dividierte Differenz ist von $q(\tau, t) := (\tau - t)_+^{k-1}$ bezüglich der Variablen τ. Also $q[t_j] = (t_j - t)_+^{k-1}$, $q[t_j, t_{j+1}] = \big((t_{j+1} - t)_+^{k-1} - (t_j - t)_+^{k-1}\big)/(t_{j+1} - t_j)$, wenn die Knoten t_j, t_{j+1} verschieden sind, usw. Hinweise: Nach der Defintion ist ψ_{jk}^+ ein Polynom vom Grad $< k$ oder Null. Seien $\psi_{jk}^+[t_\ell, t_{\ell+1}, \ldots, t_{\ell+k}]$ die k-ten dividierten Differenzen von ψ_{jk}^+. Dann ist $\psi_{jk}^+[t_\ell, t_{\ell+1}, \ldots, t_{\ell+k}] = 0$, für $\ell \neq j$.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Identifizierung von $\mathbb{S}_{k,\mathbf{t}}$ (das ist der von den B-Splines der Ordnung k mit Knotenfolge $\mathbf{t}$ aufgespannte Raum) mit denjenigen sp-Funktionen (sp=stückweise polynomial), die am Knoten t_j gerade $k-1-\#t_j$-mal stetig differenzierbar sind. Dabei ist $\#t_j$ die Vielfachheit von t_j, Auffinden einer Basis dieses Raumes, Darstellung der B-Splines als dividierte Differenz von abgeschnittenen Potenzfunktionen, Restriktion der Splines auf ein Intervall $[a, b[$, Ableitung von Splines, Knotenverfeinerung, duale Funktionale, Kondition von Basen, insbesondere von der B-Spline-Basis, Auswertung von $s = \sum_j a_j B_{jk}$.