Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 9: Ausgabetermin: am 8. Juni 2000
Abgabetermin: am 22. Juni 2000 vor den Übungen

Definition 9.1. (B-Splines) Gegeben sei eine reelle *Knotenfolge*

$$\mathbf{t} := \{t_j\},\ t_j \le t_{j+1},\ j \in \mathbb{Z}.$$

Zu dieser Knotenfolge definieren wir

$$B_{j,1}(t) := X_j(t) := \begin{cases} 1 & \text{wenn } t_j \le t < t_{j+1}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \tag{9.1a}$$

$$\omega_{j,k}(t) := \begin{cases} \dfrac{t-t_j}{t_{k+j-1}-t_j} & \text{wenn } t_j < t_{k+j-1}, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \tag{9.1b}$$

$$B_{j,k} := \omega_{j,k}B_{j,k-1} + (1-\omega_{j+1,k})B_{j+1,k-1},\ k \ge 2. \tag{9.1c}$$

Die so definierten $B_{j,k}$, $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ heißen B-*Splines der Ordnung k.*
Folgerung 9.2. (a) $B_{jk} \ge 0$, (b) $B_{jk}(t) = 0$ für $t \notin [t_j, t_{j+k}[$, (c)

$$B_{jk} = \sum_{\ell=j}^{j+k-1} b_{\ell k} X_\ell \text{ mit } b_{\ell k} \in \Pi_{k-1}, \tag{9.2}$$

Beweis: (a) Sei $t_j < t_{k+j-1}$. Wir haben $\omega_{jk}(t_j) = 0, \omega_{jk}(t_{j+k}) > 1, (1-\omega_{j+1,k})(t_j) > 1, (1-\omega_{j+1,k})(t_{k+j}) = 0$. Aus der Linearität der ω_{jk} folgt daher $w_{jk}(t) > 0, 1-\omega_{j+1,k}(t) > 0$ für alle $t \in]t_j, t_{j+k}[$. (b) folgt aus (9.2) und (9.1a). (c) folgt aus (9.1c), die $b_{\ell,k}$ sind Summen von Produkten mit $k-1$ linearen Faktoren. $\square$
Satz 9.3. (Marsden) Sei $\mathbf{t} := \{t_j\}$ eine beliebige Knotenfolge mit $\lim_{j\to\pm\infty} t_j = \pm\infty$. Für jedes $\tau \in \mathbb{R}$ gilt dann:

$$(t-\tau)^{k-1} = \sum_j \psi_{jk}(\tau)B_{jk}(t) \quad \text{mit} \tag{9.3a}$$

$$\psi_{jk}(\tau) := (t_{j+1}-\tau)(t_{j+2}-\tau)\cdots(t_{j+k-1}-\tau) \in \Pi_{k-1}. \tag{9.3b}$$

Beweis: Multiplikation von (9.1c) mit $a_j \in \mathbb{R}$ und Summation über alle $j \in \mathbb{Z}$ liefert
$\sum a_j B_{jk} = \sum\big(a_{j-1}(1-\omega_{jk}) + a_j\omega_{jk}\big)B_{j,k-1}$. Setzt man jetzt $a_j := \psi_{jk}(\tau)$ folgt wegen $a_{j-1}(1-\omega_{jk}(t)) + a_j\omega_{jk}(t) = (t-\tau)\psi_{j,k-1}(\tau)$ nach kleiner Rechnung die Behauptung. $\square$
Satz 9.4. Sei $\mathbf{t} := \{t_j\}$ eine beliebige Knotenfolge mit $\lim_{j\to\pm\infty} t_j = \pm\infty$. Für $p \in \Pi_{k-1}$ gilt

$$p = \sum_j \lambda_{jk}[p]B_{jk} \quad \text{mit} \tag{9.4a}$$

$$\lambda_{jk}[p] := \sum_{\nu=1}^{k} D^{k-\nu}p(\tau)\frac{(-D)^{\nu-1}\psi_{jk}(\tau)}{(k-1)!}. \tag{9.4b}$$

Beweis: Durch Division von (9.3a) durch $(k-1)!$ und anschließende Differentiation nach τ und Vergleich mit dem Taylor-Polynom von p an der Stelle τ. $\square$
Beispiel 9.5. Sei $p(t) = t^2 - 1$. Wir suchen eine B-Spline-Darstellung bezüglich der Knotenfolge $\mathbf{t} = \mathbb{Z}$. In diesem Fall ist $k = 3$ und $\psi_{j3}(\tau) = (j+1-\tau)(j+2-\tau), \psi'_{j3}(\tau) = 2\tau-2j-3, \psi''_{j3}(\tau) = 2, p'(\tau) = 2\tau, p''(\tau) = 2$. Damit ist $\lambda_{j3}[p] = p''(\tau)\frac{\psi_{j3}(\tau)}{2} - p'(\tau)\frac{\psi'_{j3}(\tau)}{2} + p(\tau)\frac{\psi''_{j3}(\tau)}{2} = (j+1-\tau)(j+2-\tau) - \tau(2\tau-2j-3) + \tau^2 - 1 = (j+1)(j+2) - 1$. Also ist $p = \sum_j((j+1)(j+2)-1)B_{j3}$. Will man z. B. diese Formel für $t \in [t_0, t_1[= [0, 1[$ auswerten, so genügt es, die Summe über $-2 \le j \le 0$ zu bilden, also $p = -B_{-2,3} - B_{-1,3} + B_{0,3}$.

Quelle: Carl de Boor: B(asic)-Spline Basics, Mskr. 33. S., 1986, mit Korrekturen 1996, ftp-server Madison. **b. w.**

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P25. Schreiben Sie bei beliebiger Knotenvorgabe die B-Splines vom Grad Eins und Zwei explizit als Linearkombination von Indikatorfunktionen hin.

Aufgabe P26. Wie lautet die B-Spline-Darstellung linearer Polynome? Wie gewinnt man diese Darstellung?

Aufgabe P27. Wenn viele Bernsteinpolynome in eine Zeichnung gezeichnet werden, welche Kurve bildet dann die sichtbare Einhüllende. Im Bild unten sind alle 101 Polynome vom Grad 100 gezeichnet.

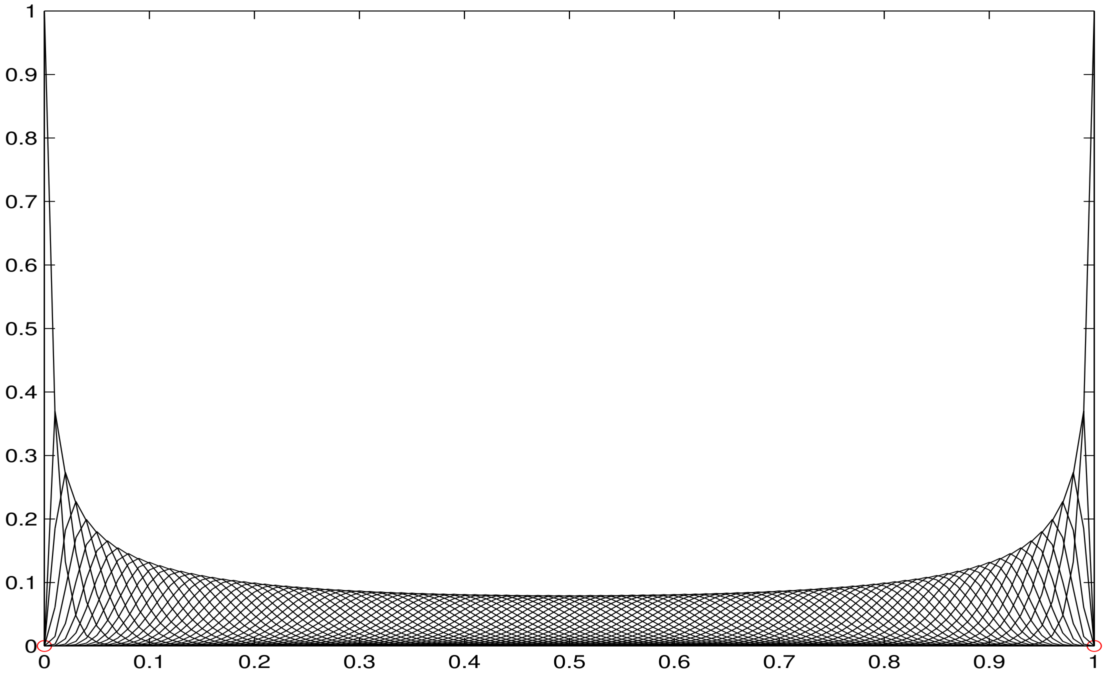

Abb. 9.6. Alle Bernsteinpolynome vom Grad 100

Hausaufgaben:

Aufgabe 17. (a) Zeichnen Sie den zu den Knoten $0, 2, 5, 10, 14, 14, 16$ gehörenden quintischen B-Spline (also Ordnung sechs) und (b) die daran beteiligten Polynomstücke. Stellen Sie dazu ein geeignetes Programm her, das in der Lage ist, beliebige B-Splines mit vorgegebener Ordnung und Knotenfolge auszurechnen und zu zeichnen. Teilen Sie (c) mit, wie lange Ihr Rechner daran gerechnet hat und welchen Rechnertyp Sie benutzt haben: Name des Betriebssystems, Spezifikation des Prozessors. Geben Sie auch das Programm ab.

Aufgabe 18. Bestimmen Sie eine B-Spline-Darstellung der Polynome (a) $p(t) := 3t^2 - 2t + 1$, (b) $p(t) := 5t^3 - 3t + 2$. Wählen Sie (A) ganzzahlige und (B) $\pm$ primzahlige Knoten also $\mathbf{t} := \{\dots, -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, \dots\}$.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: (wg. Himmelfahrt mehr als eine Woche) Remez-Algorithmus, Beweis seiner Konvergenz, Lösung des linearen Gleichungssystems $\varepsilon(t_j) = (-1)^j a_0$ über zwei Interpolationsprobleme $u(t_j) = f(t_j)$, $w(t_j) = (-1)^j, j \in \{1, 2, \dots, n+1\} \backslash \{j_0\}$, dabei ist j_0 beliebig aus $\{1, 2, \dots, n+1\}$ auszuwählen, Lösung des Approximationsproblems als nichtlineares Problem mit den Koeffizienten und den Knoten als Unbekannten mit Hilfe eines Newton-Verfahrens, gebraucht werden erste und zweite Ableitungen der Basisfunktionen (im Regelfall kein Problem) und der zu approximierenden Funktion (problematisch, z. B. Gammafunktion), Ausweg: numerische Differentiation. Neuer Abschnitt: Splines. Einführung über B(asis)-Splines, Definition rekursiv, Entwicklung der Eigenschaften des von diesen Splines aufgespannten Raumes $\mathbb{S}_{k,\mathbf{t}}$, k ist die Ordnung, $\mathbf{t}$ die Knotenfolge, Bilder von B-Splines, auch bei zusammenfallenden Knoten, und Darstellung der an den B-Splines beteiligten Polynomen, *kardinale Splines*, Knotenfolge ist $\mathbb{Z}$, *Bernstein-Splines*, Knotenfolge ist $\mathbb{B} = \{\dots, 0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots\}$, Identität von Marsden, Darstellung der Polynome (der Ordnung k) durch Linearkombinationen von B-Splines (der Ordnung k), Spezialfälle $p = 1, p = \mathrm{id}$.

`(version of 16. 6. 2000 at 1158 minutes since midnight)`