Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 8: Ausgabetermin: am 25. Mai 2000
Abgabetermin: am 8. Juni 2000 vor den Übungen

Definition 8.1. Sei $f \in \mathrm{C}[a,b]$, und gebe es $m+1$ Punkte $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_{m+1} \le b$ mit

$$f(t_j)f(t_{j+1}) < 0, \quad j = 1,2,\ldots,m, \tag{8.1}$$

dann sagt man, daß f (mindestens) m *Vorzeichenwechsel* in $[a,b]$ hat.
Definition 8.2. Hat ein Teilvektorraum $V \subset \mathrm{C}[a,b]$ die Dimension n und hat jedes Element in V höchstens $n-1$ Vorzeichenwechsel, so nennt man V einen *schwachen Haarschen Raum*.
Definition 8.3. Sei für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$

$$(x-c)_+^0 := \begin{cases} 1 & \text{für } x-c \ge 0, \\ 0 & \text{für } x-c < 0, \end{cases}$$
$$(x-c)_+^k := (x-c)^k (x-c)_+^0, \quad k = 1,2,\ldots \tag{8.2}$$

Für $(x-c)_+^1$ schreiben wir auch $(x-c)_+$. Offensichtlich ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x-c)_+^k = k(x-c)_+^{k-1}, k \ge 2$, also $(x-c)_+^k \in \mathrm{C}^{k-1}(\mathbb{R})$. Die Funktionen $(x-c)_+^k$ heißen auch *abgeschnittene* k-te *Potenzen*.

Beispiel 8.4. Sei $V := \langle 1, t, (t-c)_+ \rangle$ in $\mathrm{C}[a,b]$ mit $c \in]a,b[$. Dann ist $\dim V = 3$, V ist kein Haarscher Raum, denn $(t-c)_+$ hat unendliche viele Nullstellen, aber jedes $v \in V$ hat höchstens 2 Vorzeichenwechsel. Denn $v = \alpha + \beta t + \gamma(t-c)_+$ ist stetig und besteht aus zwei Geradenstücken, die maximal zwei Vorzeichenwechsel haben können.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P22. Unter welchen Bedingungen ist die zu einer b. A. $\hat{v}$ gehörenden Fehlerfunktion $\hat{\varepsilon} := f - \hat{v}$ streng monoton zwischen den Extremalstellen.

Aufgabe P23. Nennen Sie Haarsche Räume.

Aufgabe P24. Was ist die Grundidee beim Remez-Algorithmus?

Hausaufgaben:

Aufgabe 15. Bestimmen Sie mit einem vorgegebenen MATLAB-Programm remez.m (Internet an bekannter Stelle) die b. A. der Gammafunktion auf [1,2] in Π_n mit $n = 4$ und $n = 6$. Protokollieren Sie die Extremalpunkte t_j, $j = 1,2,\ldots,n+2$, die Koeffizienten α_j, $j = 1,2,\ldots,n+1$ und die Minimalabweichung $|\alpha_0|$. Verwenden Sie dabei die (Standard) MATLAB-Darstellung format short. Zeichnen Sie die beiden Fehlerfunktionen.

Aufgabe 16. (a) Seien $a < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < b$ gegeben und

$$V := \langle 1, t, (t-t_1)_+, (t-t_2)_+, \ldots, (t-t_k)_+ \rangle.$$

Zeigen Sie: V ist ein schwacher Haarscher Raum der Dimension $n := k+2$ in $\mathrm{C}[a,b]$. (b) Ändert sich etwas, wenn (b1) $t_1 = a$ oder (b2) $t_1 < a$. (c) Zeigen Sie, daß Haarsche Räume schwache Haarsche Räume sind.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: de la Vallée-Poussin für Haarsche Räume, weitere untere Schranke des Minimalabstandes im Polynomfall durch Mittelbildung, Bedingungen für Monotonie der Fehlerfunktion zwischen Extremelpunkten, Auflistung verschiedener Haarscher Räume, Haarsche Räume sind i.w. auf eindimensionale reelle und komplexe Fälle beschränkt, Satz von Mairhuber im Reellen, Einführung in den Remez-Algorithmus.

(version of 25. 5. 2000 at 1159 minutes since midnight)