Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 7: Ausgabetermin: am 18. Mai 2000
Abgabetermin: am 25. Mai 2000 vor den Übungen

Definition 7.1. Seien zwei Normen $|| \quad ||_a, || \quad ||_b$ in demselben $\mathbb{K}$-Vektorraum X gegeben. Diese Normen heißen *äquivalent*, wenn es Konstanten $0 < k \le K$ gibt mit

$$k||x||_a \le ||x||_b \le K||x||_a \text{ für alle } x \in X. \tag{7.1}$$

Das bedeutet, daß die durch die Normen definierten offenen Mengen für beide Fälle identisch sind, oder mit anderen Worten: die beiden Topologien sind identisch, oder mit noch anderen Worten: die identische Abbildung $j : (X, || \quad ||_a) \to (X, || \quad ||_b)$ ist stetig. Beispiele: *Alle* Normen im $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent. Die Räume $\mathrm{C}[-1,1]$ mit $|| \quad ||_\infty$ und mit $|| \quad ||_1$ sind nicht äquivalent. Betrachten Sie $f(t) = |t|^n$.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P19. In welchem Intervall ist $V := \langle \cos \rangle$ ein Haarscher Raum? Dasselbe für $V := \langle x, x^3 \rangle$.

Aufgabe P20. Was ist eine Alternationsmenge und was ist eine Alternante?

Aufgabe P21. Wie lautet der Satz von de la Vallée-Poussin für Haarsche Räume auf Intervallen $[a, b]$?

Hausaufgaben: Zeigen Sie durch Lösen der beiden folgenden Aufgaben, daß strikt konvexe Räume nicht notwendig gleichmäßig konvex sind.

Aufgabe 13. Betrachten Sie $X = \mathrm{C}[0,1]$ in der Maximumsnorm $|| \quad ||_\infty$. Konstruieren Sie dazu eine äquivalente strikte Norm $|| \quad ||$ nach folgender Technik: Wählen Sie eine dichte Folge $\{t_j\}$ in $[0,1]$ mit $t_j \neq 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Definieren Sie $F : X \to \ell_2$ durch $F(x) := (||x||_\infty, \frac{1}{2}x(t_1), \frac{1}{2^2}x(t_2), \frac{1}{2^3}x(t_3), \ldots)$ und zeigen Sie (a), daß $F(x) \in \ell_2$. Definieren Sie eine neue Norm $||x|| := ||F(x)||_2$ und zeigen Sie (b), daß diese strikt ist und (c) äquivalent zur Ausgangsnorm.
Zur Illustration aber auch als Hinweis für den kommenden Teil folgendes Beispiel: Sei $x(t) = 1$ die konstante Funktion Eins. Dann ist $||x||_\infty = 1$. Wir wollen auch $||x||$ berechnen. Es ist $F(x) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$, und $||x||^2 = ||F(x)||_2^2 = \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2^{2j}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$, also $||x|| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Ist also $x(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, so ist $||x|| = 1$.

Aufgabe 14. Zeigen Sie, daß die in der vorigen Aufgabe konstruierte Norm nicht gleichmäßig konvex ist. Benutzen sie dazu die auf dem Lösungsbogen 5, Aufgabe P15, (b2) angegebene Definition der gleichmäßigen Konvexität. Betrachten Sie jetzt die Funktionenfolgen $\{x_j(t)\}$, $\{y_j(t)\}$ mit $y_j(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Die Folge $\{y_j(t)\}$ ist also konstant (für jedes j dasselbe Element) und jedes Folgenglied ist eine konstante Funktion. Nach dem obigen Beispiel ist $||y_j(t)|| = 1$. Die Folge $\{x_j(t)\}$ wird folgendermaßen definiert:

$$h_j(t) := \frac{1}{2}\sqrt{3}\begin{cases} jt & \text{für } 0 \le t \le \frac{1}{j}, \\ 1 & \text{für } \frac{1}{j} \le t \le 1, \end{cases} \quad x_j(t) := \frac{h_j(t)}{||h_j||}.$$

Ganz offensichtlich ist $||x_j(t)|| = 1$ für alle j. Zeigen Sie also, daß $||\frac{x_j+y_j}{2}|| \to 1$, aber $||x_j - y_j||$ nicht gegen Null konvergiert.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Beginn eines neuen Abschnitts: Approximation in
$Q = (\mathrm{C}(B), || \quad ||_\infty, f, V)$ mit $V = \mathbb{K}$-Vektorraum und $\dim V = n$. Äquivalenz von drei Bedingungen: Nullstellenbedingung, Nicht-Singulariät einer Matrix, eindeutige Lösbarkeit des Interpolationsproblems. Jede der drei äquivalenten Bedingungen wird Haarsche Bedingung genannt. Satz (Haar): Das Approximationsproblem hat in V zu jedem f genau dann eine eindeutige Lösung, wenn V die Haarsche Bedingung erfüllt. Eine weitere Charakterisierung von b. A. in Haarschen Räumen. Definition von Alternationsmengen und Alternanten der Länge m, Alternantensatz in Haarschen Räumen aus $\mathrm{C}[a, b]$. Die erwähnte Charakterisierung lautet:

b. w.

Satz 7.1. Sei ein Approximationsproblem durch $Q := (X := \mathrm{C}(B)), ||\quad||_\infty, f, V)$ beschrieben mit: V sei n-dimensionaler Haarscher $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in X\backslash V$. Die Menge B ist kompakt (z. B. Teilmenge im $\mathbb{K}^m$) mit hinreichend vielen Punkten. Ein Element $\hat{v} \in V$ ist genau dann b. A. von f, wenn ein Funktional $x^* \in X^*$ existiert von der Form

(i) $$x^*(x) := \sum_{j=1}^{k} \mu_j x(t_j),\ \mu_j \in \mathbb{K}\backslash 0,\ t_j \in B,\ \text{paarweise verschieden, mit}$$

(ii) $$||x^*|| = \sum_{j=1}^{k} |\mu_j| = 1,$$

(iii) $$x^* \perp V \Leftrightarrow x^*(v) = 0 \text{ für alle } v \in V,$$

(iv) $$x^*(f-\hat{v}) = ||f-\hat{v}||_\infty,$$

(v) $$n+1 \le k \le \begin{cases} n+1 & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ 2n+1 & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Zum Beweis kann der bereits früher bewiesene Satz herangezogen werden:
Satz 7.2. (Im Manuskript von Martin Wilde, 1993, S. 30: Charakterisierungssatz 4) Sei ein Approximationsproblem durch $Q := (X, ||\quad||, f, V)$ beschrieben mit: V ist n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in X\backslash\overline{V}$. Ein Element $\hat{v} \in V$ ist genau dann b. A. von f, wenn ein Funktional $x^* \in X^*$ existiert von der Form

(i) $$x^* := \sum_{j=1}^{k} \lambda_j x_j^*,\ \lambda_j \in]0,1],\ x_j^* \in E(B^*),$$
$$x_j^* \text{ sind Extremalpunkte der Einheitskugel } B^* \subset X^*,$$

(ii) $$||x^*|| = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,$$

(iii) $$x^* \perp V \Leftrightarrow x^*(v) = 0 \text{ für alle } v \in V,$$

(iv) $$x^*(f-\hat{v}) = ||f-\hat{v}||,$$

(v) $$1 \le k \le \begin{cases} n+1 & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ 2n+1 & \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

Die Extremalpunkte x^* der Einheitskugel $B^* \subset X^*$ haben für den Fall $X = \mathrm{C}(B)$ die Form $x^*(x) = \gamma x(t)$ mit einem festen $t \in B$ und $\gamma \in \mathbb{K}$ mit $|\gamma| = 1$.
Gelten die Voraussetzungen des Satzes 7.1, so definieren wir $\mu_j x(t_j) = \lambda_j \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_j} x(t_j) =: \lambda_j x_j^*$. Damit sind die Voraussetzungen des Satzes 7.2 erfüllt, und alle Behauptungen des Satzes 7.1 gelten mit Ausnahme der Bedingung $k \ge n+1$. Daß in Haarschen Räumen eine b. A. $\hat{v}$ von f die Eigenschaft hat, daß die Fehlerfunktion $\hat{\varepsilon} := f - \hat{v}$ mindestens $n+1$ Extremalpunkte in B besitzt, hatten wir bereits im Beweis des Haarschen Satz kennengelernt. Der Beweis ging so: Gäbe es nur $m \le n$ Extremalpunkte $t_1, t_2, \ldots, t_m$, so kann das Interpolationsproblem $v(t_j) = \hat{\varepsilon}(t_j)$, $j = 1, 2, \ldots, m$ gelöst werden. Es gilt dann $\Re\{\overline{\hat{\varepsilon}(t_j)} v(t_j)\} = |\hat{\varepsilon}(t_j)|^2 = ||\hat{\varepsilon}||_\infty^2 > 0$, das Kolmogoroffkriterium kann also nicht erfüllt werden, d. h. $\hat{v}$ kann keine b. A. von f sein, ein Widerspruch.