Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 5: Ausgabetermin: am 4. Mai 2000
Abgabetermin: am 11. Mai 2000 vor den Übungen

In der Vorlesung wurde der folgende Satz angegeben aber nicht bewiesen.

Satz 5.1. Wir betrachten das durch $Q := (\mathrm{C}(B), || \ \ ||_\infty, f, V)$ definierte Approximationsproblem (ohne Voraussetzungen über V). Sei $D \subset B$ eine nicht leere Menge. (a) Gibt es $\hat{v} \in V$ mit

$$\inf_{t \in D} \mu(t, v) \leq 0 \text{ für alle } v \in V, \tag{5.1}$$

wobei μ in (L3.1) definiert ist, nämlich

$$\mu(t, v) := \Re\{(\overline{f(t) - \hat{v}(t)})(v(t) - \hat{v}(t))\},\ t \in B,\ v \in V. \tag{L3.1}$$

Dann ist

$$\tau := \inf_{t \in D} |(f - \hat{v})(t)| \leq \rho_V(f). \tag{5.2}$$

(b) Ist $D = E_{\hat{v}}$, so ist $\hat{v}$ eine b. A. von f.

Beweis: (a) Für $\tau = 0$ ist die Behauptung richtig. Sei also $\tau > 0$. Dann ist

$$|(f - \hat{v})(t)| \geq \tau > 0 \text{ für alle } t \in D.$$

Wir können also die gegebene Ungleichung (5.1) durch $|(f - \hat{v})(t)| > 0$ dividieren und erhalten dann die äquivalente Ungleichung

$$\inf_{t \in D} \Re\{\operatorname{sign}(f(t) - \hat{v}(t))(v(t) - \hat{v}(t))\} \leq 0 \text{ für alle } v \in V. \tag{5.1'}$$

Wir benutzen dabei und im folgenden

$$\operatorname{sign} z := \frac{\bar{z}}{|z|}, \quad z \neq 0, \quad \Re\{\operatorname{sign} z z\} = |z|, \quad \Re z \leq |z| \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}. \tag{5.3}$$

Nach (5.1′) gibt es also zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $v \in V$ ein $t \in D$ mit

$$\Re\{\operatorname{sign}(f(t) - \hat{v}(t))(v(t) - \hat{v}(t))\} \leq \varepsilon.$$

Durch Umformung ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\Re\{\operatorname{sign}(f(t) - \hat{v}(t))(v(t) - \hat{v}(t))\} &= \\ \Re\{\operatorname{sign}(f(t) - \hat{v}(t))(v(t) - f(t) + f(t) - \hat{v}(t))\} &= \\ \Re\{\operatorname{sign}(f(t) - \hat{v}(t))(f(t) - \hat{v}(t))\} - \Re\{\operatorname{sign}(f(t) - \hat{v}(t))(f(t) - v(t))\} &\leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Daraus folgt unter Benutzung von (5.3)

$$|f(t) - \hat{v}(t)| \leq \varepsilon + \Re \operatorname{sign}(f(t) - \hat{v}(t))(f(t) - v(t)) \leq \varepsilon + |f(t) - v(t)|. \tag{5.4}$$

Sei im Gegensatz zur Annahme (5.2) $\tau > \rho_V(f)$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $\tilde{v}$ mit

$$\tau - \varepsilon > \rho_V(f) \quad \text{und} \quad |f(t) - \tilde{v}(t)| \leq ||f - \tilde{v}||_\infty < \tau - \varepsilon \text{ für alle } t \in B. \tag{5.5}$$

Wenden wir die oben hergeleitete Ungleichung (5.4) auf $v = \tilde{v}$ an, so erhalten wir

$$\tau - \varepsilon > |f(t) - \tilde{v}(t)| \geq |f(t) - \hat{v}(t)| - \varepsilon \geq \tau - \varepsilon.$$

b. w.

Die erste Ungleichung folgt aus (5.5) für alle $t \in B$, die zweite Ungleichung folgt aus (5.4) für gewisse $t \in D$, die letzte Ungleichung folgt aus der Definition (5.2) von τ für alle $t \in D$. Insgesamt gelten die Ungleichungen mindestens für ein $t \in D$, und wir erhalten einen Widerspruch.
(b) In diesem Fall ist $\tau \le \rho_V(f) \le \tau = ||f - \hat{v}||_\infty$. Also ist $\hat{v}$ eine b. A. von f.

Bemerkung: Wir haben damit den hinreichenden Teil des Kolmogoroff-Kriteriums für $X = \mathrm{C}(B)$ für beliebige Teilmengen V bewiesen.

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P13. Wie lauten Skelettsatz und Satz von de la Vallée-Poussin? Wenden Sie sie auf sehr einfache Beispiele an.

Aufgabe P14. Für welche Approximationsprobleme kann man leicht die Existenz einer Lösung nachweisen?

Aufgabe P15. Was sind strikte und gleichmäßige Normen?

Hausaufgaben:

Aufgabe 9. Wenden Sie den Satz von de la Vallée-Poussin an auf das durch $Q := (\mathrm{C}[-1,2], ||\quad||_\infty, f(x) := 1 - x^2, V := \langle 1, x\rangle)$ und $\hat{v}(x) := -x$ beschriebene Approximationsproblem. Bestimmen Sie also eine untere Schranke der Minimalabweichung $\operatorname{dist}(V, f)$ indem Sie für $\hat{v}$ die Voraussetzungen des Satzes von de la Vallée-Poussin erfüllen. Hinweis: Verwenden Sie Punktfunktionale an den Stellen (a) $-1, 0, 2$ und (b) $-1, 0, 1.8$. (c) Berechnen Sie auch $||f - \hat{v}||_\infty$.

Aufgabe 10. Sei ein Approximationsproblem definiert durch $Q := (\mathrm{C}[1,2], ||\quad||_\infty, f(x) := \Gamma(x), V := \langle 1, x, x^2, x^3, x^4\rangle)$. Dabei ist Γ die übliche Gammafunktion. (a) Bestimmen Sie die beste Approximation von f durch Anwendung des Skelettsatzes auf die Punkte $x_1 := 1, x_2 := 1.083, x_3 := 1.314, x_4 := 1.624, x_5 := 1.893, x_6 := 2$. Lösen Sie also das lineare Gleichungssystem $(f - v)(x_j) = (-1)^j \mu$, $j = 1, 2, \ldots, 6$.* Die Unbekannten in diesem 6×6-Gleichungssystem sind die fünf Koeffizienten des Polynoms v und μ. (b) Sei v die Lösung des linearen Gleichungssystems. Berechnen Sie die Normen $||f - v||_\infty$ ausgerechnet auf $[1, 2]$ und auf den gegebenen sechs Punkten. Verwenden Sie zweckmäßigerweise eine Programmiersprache, in der die Gammafunktion vorprogrammiert ist, wie z B. MATLAB.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: (Nur eine Stunde wg. Montag, 1. Mai) Fortsetzung für lineare Probleme in endlich dimensionalen Räumen, Skelettsatz, weitere Charakterisierung (Satz #4), Satz von de la Vallée-Poussin (untere Schranken, keine Voraussetzung an die Dimension), Anwendung des Charakterisierungssatzes (#4) auf Probleme in $X := \mathrm{C}(B)$ mit Hilfe von Punktfunktionalen. Beendigung des ersten Abschnitts über Charakterisierungen.

`(version of 9. 5. 2000 at 1026 minutes since midnight)`

* Daß der Fehler im Vorzeichen alterniert ist ein Vorgriff auf eine noch zu besprechende Theorie.