Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 3: Ausgabetermin: am 20. April 2000

Abgabetermin: am 27. April 2000 vor den Übungen

Definition 3.1. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. (a) Eine endliche, aber beliebig lange Summe der Form

$$x := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j \text{ mit } x_j \in X,\ \lambda_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \tag{3.1}$$

heißt *Konvexkombination* der Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_m$. (b) Sei M eine Teilmenge von X. Die Menge aller Konvexkombinationen von Punkten aus M heißt *konvexe Hülle* von M mit der Bezeichnung $\mathrm{conv}(M)$. (c) Sei $K \subset X$ konvex. Gibt es zu einem Punkt $e \in K$ nicht zwei verschiedene Punkte $x \neq e, y \neq e$ mit $e = (1-\lambda)x + \lambda y, \lambda \in]0,1[$, so heißt e ein *Extremalpunkt* oder eine *Ecke* von K. Beispiele im $\mathbb{R}^2$: (i) Die gewöhnlichen Ecken eines Quadrats und (ii) alle Randpunkte einer Keisscheibe sind in diesem Sinne Extremalpunkte. (iii) Eine Halbebene besitzt keine Extremalpunkte.

Lemma 3.2. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Durchschnitt D von beliebig vielen konvexen Mengen $D_j \subset X, j \in J$ ist konvex. **Beweis:** Seien $x, y \in D$. Das bedeutet $x, y \in D_j$ für alle $j \in J$. Da die Mengen D_j konvex sind, liegt auch $z := (1-\lambda)x + \lambda y \in D$ für jedes $\lambda \in [0,1]$.

Lemma 3.3. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $M \subset X$. Dann ist $K_1 :=\mathrm{conv}(M)$ gleich dem Durchschnitt K_2 aller konvexen Obermengen von M. **Beweis:** (a) Die Menge K_1 ist eine konvexe Obermenge vom M, also $K_2 \subset K_1$, Einzelheiten weiter unten. (b) Wir zeigen $K_1 \subset K_2$. Sei $x \in K_1$ und S eine konvexe Obermenge von M. Wir müssen $x \in S$ zeigen, unabhängig davon wie S gewählt wurde. Sei $x := \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j$. Wir machen einen Induktionsbeweis nach m. Ist $m = 1$, so ist $x \in M \subset S$. Ist die Behauptung für jedes x mit $m-1$ Summanden richtig, so ist $x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j = \sum_{j=1}^{m-1} \lambda_j x_j + \lambda_m x_m = (1-\lambda_m) \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\lambda_j}{1-\lambda_m} x_j + \lambda_m x_m \in S$. Einzelheiten zu (a): Es ist $M \subset K_1$, da K_1 auch die Konvexkombinationen der Länge Eins umfaßt. Weiter ist K_1 konvex, denn seien $x := \sum_{j=1}^{m} \mu_j x_j$, $y := \sum_{j=1}^{n} \nu_j y_j$ Konvexkombinationen der Form (3.1), und $\lambda \in [0,1]$, dann ist $z := (1-\lambda)x + \lambda y = \sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\mu_j x_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda \nu_j y_j$ mit $\sum_{j=1}^{m} (1-\lambda)\mu_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda \nu_j = (1-\lambda) + \lambda = 1$. Das Element z ist also auch eine Konvexkombination der Form (3.1).

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P7. Wie lautet das Kolmogoroff-Kriterium in verschiedenen Fällen: (a) allgemeiner Fall, (b) spezieller Fall $X = \mathrm{C}(B), \|\ \ \| = \|\ \ \|_\infty$.

Aufgabe P8. (a) Skizzieren Sie den Beweis des speziellen Kolmogoroff-Kriteriums für den konvexen Fall. (b) Wie unterscheidet sich der angegebene Beweis von dem allgemeinen, linearen Fall?

Aufgabe P9. (a) Haben Charakterisierungssätze etwas mit Eindeutigkeits- oder Existenzsätzen zu tun? (b) Mit welchen Techniken kann man untere Schranken für $\mathrm{dist}(f, V)$ gewinnen.

Hausaufgaben:

Aufgabe 5. (a) Sei x^* ein Extremalpunkt der Einheitskugel $B^* := \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leq 1\}$. Zeigen Sie, daß auch γx^* ein Extremalpunkt ist für $\gamma \in \mathbb{K}$ mit $|\gamma| = 1$. (b) Zeigen Sie, daß für $X = \mathrm{C}(B)$ die Elemente $x^* \in X^*$ definiert durch $x^*(x) := x(t_0)$ für ein festes $t_0 \in B$ Extremalpunkte der Einheitskugel B^* sind. (c) Zeigen Sie (in der Situation (b)), daß es keine anderen Extremalpunkte gibt. (d) Zeigen Sie, daß die Einheitskugel von $X := L_1[0,1]$ keine Extremalpunkte besitzt.

Aufgabe 6. (a) Beweisen Sie den Satz von Carathéodory: Im $\mathbb{K}^n$ besteht die konvexe Hülle einer Menge M aus allen Konvexkombinationen mit höchstens $m+1$ Summanden mit

$$m = \begin{cases} n & \text{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ 2n & \text{im Fall } \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases} \tag{3.2}$$

b. w.

(b) Zeigen Sie an Beispielen mit $n = 1$ und $n = 2$, daß die angegebene Schranke $m + 1$ nicht verkleinert werden kann. Hinweis zu (a): Zeigen Sie: Ist x eine Konvexkombination mit $r > m+1$ Summanden, so kann x als Summe von $r - 1$ Summanden dargestellt werden.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: konvexe Hülle als Durchschnitt aller konvexen Obermengen und als Menge aller Konvexkombinationen, Definition eines lokal konvexen topologischen Raumes, Satz von Krein & Milman über die Existenz von Ecken bei konvexen, kompakten Teilmengen in einem derartigen Raum, Satz von Alaoglu über die Kompaktheit der Einheitskugel im Dualraum in geeigneter Topologie (s. u.), $L_p^* = L_q$ für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$, weitere Form des Satzes von Krein & Milman: $\overline{\text{conv}(E(M))} = M$. Dabei ist $E(M)$ die Menge der Extremalpunkte (Ecken) der konvexen, kompakten Menge M. Satz von Hahn & Banach über die Existenz eines Funktionals x^* mit (i) $x^*(f) = \text{dist}(f, V)$, (ii) $||x^*|| = 1$, (iii) $x^* \perp V$. Erster und weitere Charakterisierungssätze für den linearen Fall und speziell $X = \mathrm{C}(B)$ über Extremalfunktionale (Punktfunktionale), Beispiel $(\mathrm{C}[0,1], ||\ \ ||_\infty, \sqrt{t}, \langle 1, t\rangle)$ zur Gewinnung von unteren Schranken von $\text{dist}(f, V)$, Kolmogoroff-Kriterium, Ausdehnung auf den konvexen Fall für $(\mathrm{C}(B), ||\ \ ||_\infty)$, weitere Methode zur Gewinnung von unteren Schranken.

Anhang über *geeignete* Topologien

Ist X eine Menge und $\mathcal{T}$ eine Familie von Teilmengen mit der Eigenschaft, daß endliche Durchschnitte und beliebige Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{T}$ wieder zu $\mathcal{T}$ gehören, so nennt man $\mathcal{T}$ eine *Topologie* von X und $(X, \mathcal{T})$ einen *topologischen Raum*. Die Mengen in $\mathcal{T}$ nennt man *offen*. Sei X eine Menge und F eine Familie von Abbildungen $f : X \to Y_f$, wobei jedes Y_f ein topologischer Raum ist. Die gröbste Topologie von X (also diejenige Topologie, die mit den wenigsten offenen Mengen auskommt), in der alle $f \in F$ stetig sind, heißt *schwache Topologie* von X bez. F. Ist $F \subset G$, so muß die entsprechende schwache Toplogie von X bez. G mehr offene Mengen enthalten, ist also *feiner*. Ist $\mathcal{O}$ irgend ein System von Teilmengen von X, so kann man dieses System um die Vereinigungen der endlichen Durchschnitte erweitern und erhält so eine Topologie von X. Daher nennt man das System $\mathcal{O}$ auch *Erzeugendensystem* einer Topologie. Sei X ein normierter Vektorraum, X^* der Dualraum, also die Menge der linearen und stetigen Abbildungen von $X \to \mathbb{K}$. Dieser Raum ist auch ein normierter Vektorraum mit der Norm $||x^*|| := \sup_{||x||=1} |x^*(x)|$. Es hat also einen Sinn auch $X^{**} := (X^*)^*$ zu betrachten. Jedem $x \in X$ kann man ein Element $x^{**} \in X^{**}$ zuordnen durch $x^{**}(x^*) := x^*(x)$. Man kann daher eine *Einbettung* $X \subset X^{**}$ definieren und X mit einem Teil von X^{**} identifizieren.

Wir können also X^* mit zwei neuen Toplogien versehen nämlich bezüglich X, aufgefaßt als Teilmenge von X^{**} und bezüglich X^{**} selbst. Diese Topologien heißen *schwach**, bzw. *schwache* Topologien von X^*. Sie sind beide *gröber* (benutzen also weniger offene Mengen) als die in X^* bereits durch die Norm gegebene Topologie. Die im Satz von Alaoglu zu benutzende Topologie ist die schwach*-Topologie von X^*. Ist $X = X^{**}$, so heißt X *reflexiv* und die beiden Topologien stimmen überein. Das gilt z. B. für Räume mit Skalarprodukt und für L_p-Räume mit $1 < p < \infty$. Mehr Einzelheiten bei Hirzebruch & Scharlau: Einführung in die Funktionalanalysis, Spektrum, Heidelberg, 1996, Kapitel IV und Anhang I.2.

`(version of 20. 4. 2000 at 593 minutes since midnight)`