Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 2: Ausgabetermin: am 13. April 2000
Abgabetermin: am 20. April 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P4. Wiederholen Sie Definitionen von Matrixnorm, Operatornorm, nennen Sie Beispiele, definieren und berechnen Sie $||\mathbf{I}||_{1,2}$. Dabei ist $\mathbf{I}$ die Einheitsmatrix.

Aufgabe P5. Welches Datenquadrupel bestimmt ein Approximationsproblem, was ist ein sinnvolles Approximationsproblem, welches ist die beste konstante Approximation von tan in $[0, \pi/4]$, bei Benutzung der $1, 2, \infty$-Norm.

Aufgabe P6. Bestimmen Sie mithilfe von einfachen Funktionalen untere Schranken für den Minimalabstand bei den Problemen der vorigen Aufgabe.

Hausaufgaben:

Aufgabe 3. (a) Bestimmen Sie die besten Approximationen von Sinus und Kosinus auf $[0, \pi/4]$ der Form $\ell(x) := a + bx$ in den Normen $|| \quad ||_2$ und $|| \quad ||_\infty$, und geben Sie in allen Fällen den Fehler, gemessen in der ∞-Norm an. Hinweis: Zur Bestimmung der b. A. ℓ in der $|| \quad ||_\infty$-Norm verwenden Sie, daß für den Fehler $\varepsilon := f - \ell$ gilt: $\varepsilon(x_1) = -\varepsilon(x_2) = \varepsilon(x_3)$, $|\varepsilon(x_1)| = ||\varepsilon||_\infty$ mit $0 \le x_1 < x_2 < x_3 \le \pi/4$. (b) Geben Sie die Datenquadrupel der obigen Approximationsprobleme an. (c) Welcher Fehler ergibt sich für Sinus und Kosinus im Intervall $[0, \pi/2]$ bei Verwendung der Formeln $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$, $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$, wenn die obigen b. A. für Sinus und Kosinus verwendet werden. Dabei ist der Fehler immer in der ∞-Norm zu messen. Benutzung eines Computers kann für gewisse Teile der Aufgabe sinnvoll sein.

Aufgabe 4. (a) Bestimmen Sie die b. A. von $f(z) := z^3$ durch eine (möglicherweise komplexe) Konstante auf dem Dreieck $D := \{z_1, z_2, z_3\} := \{0, 1, \mathrm{i}\}$, d. h. auf den drei angegebenen Ecken unter Verwendung der Tschebyscheff-Norm. (a1) Wie sieht das entsprechende Datenquadrupel aus. Hinweis: Versuchen Sie die Konstante c so zu bestimmen, daß $|c - z_1^3| = |c - z_2^3| = |c - z_3^3|$, also $|c| = |c - 1| = |c + \mathrm{i}|$ gilt. (b) Welche Form haben die linearen Funktionale x^* in diesem Fall, und welche Form hat $x^*(f)$. (b1) Zeigen Sie, daß der obige Ansatz tatsächlich eine b. A. $\hat{c}$ liefert, indem Sie ein Funktional x^* finden mit $|x^*(f)| = ||f - \hat{c}||_\infty$.

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Einführung von Matrixnormen, Operatornormen bei Matrizen, auch bei verschiedenen Normen in Ausgangs- und Bildraum, Spezialfälle: Spaltensummennorm, Spektralnorm, Zeilensummennorm, Beispiel einer Matrixnorm, die keine Operatornorm ist: Frobeniusnorm, Approximationsproblem, Daten bilden ein Quadrupel, Minimalabstand $\rho_V(f), \mathrm{dist}(f, V)$, Beispiele: konstante Approximation von sin in den Normen $|| \quad ||_p$, $p = 1, 2, \infty$, Dualraum, untere Schranken für den Minimalabstand, konvexe Mengen, Ecken von konvexen Mengen.

(version of 12. 4. 2000 at 1097 minutes since midnight)