Approximation

Gerhard Opfer SS 2000

Bogen 1: Ausgabetermin: am 6. April 2000
Abgabetermin: am 13. April 2000 vor den Übungen

Präsenzaufgaben:

Aufgabe P1. (a) Welches sind die Axiome für eine Norm. (b) Wie ist Konvexität definiert. (c) Wie ist ein metrischer Raum definiert. (d) Wie ist ein Raum mit Skalarprodukt definiert. (e) In einem Raum mit Skalarprodukt gilt der Satz des Pythagoras. Wie lautet er. Leiten Sie ihn her.

Aufgabe P2. (a) Nennen Sie spezielle Normen im $\mathbb{K}^n$. (b) Wie sehen die entsprechenden Einheitskugeln für $n = 2$ aus. (c) Wie lautet das übliche Skalarprodukt. (d) Welches sind die entscheidenden Ungleichungen für die p-Normen.

Aufgabe P3. (a) Nennen Sie Normen in Funktionenräumen. (b) Geben Sie ein Skalarprodukt in einem Funktionenraum an.

Hausaufgaben:

Aufgabe 1. Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer *Quasinorm* $|| \quad || : X \to \mathbb{R}_{\geq}$ definiert durch

i) $||x|| \neq 0$ für alle $x \neq \mathbf{0}$,

ii) $||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$ für alle $x \in X$ und alle $\alpha \in \mathbb{K}$.

Sei $K := \{x : ||x|| \leq 1\}$ die Einheitskugel in X. Zeigen Sie: Die Einheitskugel ist genau dann konvex, wenn die Quasinorm eine Norm ist.

Aufgabe 2. (a) Zeigen Sie, daß in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum $(X, < \quad , \quad >)$ mit Skalarprodukt die Parallelogrammgleichung

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \tag{1.1}$$

gilt. (b) Zeigen Sie, daß ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum in dem die Parallelogrammgleichung (1.1) gilt ein Raum mit Skalarprodukt ist. Konstruieren Sie dieses Skalarprodukt. Hinweis: Behandeln Sie zuerst den reellen Fall. Zeigen Sie, daß im komplexen Fall wegen der Linearität in der ersten Komponente aus $< \mathrm{i}x, y >= \mathrm{i} < x, y >$ folgt: $\Im < x, y >= -\Re < \mathrm{i}x, y >$. Dabei ist $\Re, \Im$ der Real- bzw. Imaginärteil einer komplexen Zahl. [(a) ein Punkt, (b) 3 Punkte]

Inhalt der vorigen Vorlesungswoche: Normen, Metriken, Skalarprodukte, Hinweis auf Ungleichungen von Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz für den $\mathbb{K}^n$, Normen $|| \quad ||_p$ in $\mathrm{C}(B)$ und in $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^n)$ und in $L_p(\mathbb{R}^n)$.

(version of 6. 4. 2000 at 599 minutes since midnight)