2. Mengen

Wir verwenden den “naiven” Mengenbegriff nach Georg Cantor (1845-1918):

Definition (2.1) Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen.

Wichtige (plausible) Eigenschaften der obigen “Definition”:

- Es muss – zumindest im Prinzip – festliegen, welche Elemente zur Menge gehören.
- Die Elemente müssen *unterscheidbar* sein, d.h. es muss ein Gleichheitsbegriff erklärt sein.

Notation (2.2)

- Mengen bezeichnen wir mit den Buchstaben $A, B, \ldots, M, N, \ldots$
- $a \in A \;:\Leftrightarrow\; a$ ist ein Element der Menge A
- $a \notin A \;:\Leftrightarrow\; \neg(a \in A)$

Die korrekte *Definition von Mengen* erfolgt entweder durch eine Aufzählung der Elemente der Menge, also z.B.

$$M = \{1, 2, 3, 4\}$$

oder Angabe einer die Menge beschreibenden Eigenschaft (Aussageform):

$$M = \{x \in \Omega \,:\, E(x)\}$$

wobei $E(x)$ eine Aussageform für eine Klasse Ω ist.

Beispiele (2.3) $M = \{x \in \mathbb{N} : 5 < x < 9\} = \{6, 7, 8\}$,
$S = \{x \in \mathbb{N} : (5 < x < 9) \vee (3 \leq x < 4)\} = \{3, 6, 7, 8\}$,
$A = \{a\}$, $B = \{\{a\}\}$, $C = \{a, \{a\}\}$, $D = \{a, \{a\}, \{\{a\}\}\}$,

Bei der beschreibenden Form einer Menge darf die Klasse Ω nicht zu gross sein. Ansonsten entstehen in sich widersprüchliche Aussagen.

Russelsche Antinomie (2.4)
Gibt es die Menge aller Mengen, die sich selbst nicht als Element enthalten? $M := \{X : X \notin X\}$?
Aus dieser Definition würde folgen: $\forall X : (X \in M \Leftrightarrow X \notin X)$, woraus sich speziell für $X = M$ ergibt: $M \in M \Leftrightarrow M \notin M$, also ein offensichtlicher Widerspruch!

Die Zahlenbereiche (2.5):

natürlichen Zahlen	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$
Indexzahlen	$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
ganze Zahlen	$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$
rationale Zahlen	$\mathbb{Q} = \{p/q \, : \, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
reelle Zahlen	$\mathbb{R} = \{\lim_{n\to\infty} q_n \,\vert\, (q_n) \text{ Cauchyfolge in } \mathbb{Q}\}$
komplexen Zahlen	$\mathbb{C} = \{x + iy \,\vert\, x, y \in \mathbb{R}\}$
Quaternionen	$\mathbb{H} = \{x + iu + jv + kw \,\vert\, x, u, v, w \in \mathbb{R}\}$

Gleichheit von zwei Mengen (2.6) (Extensionalitätsaxiom)

$$A = B \;:\Leftrightarrow\; \forall\, a \,:\, (a \in A \;\Leftrightarrow\; a \in B)$$

Teilmenge (2.7)

$$A \subset B \;:\Leftrightarrow\; \forall a \,:\, (a \in A \;\Rightarrow\; a \in B)$$

Es gibt eine Menge, die kein Element enthält, sie heißt leere Menge $\emptyset$; es gibt nur eine leere Menge (wegen Extensionalitätsaxiom) und diese ist Teilmenge jeder anderen Menge.

Ordnungseigenschaft (2.8)

a) $A \subset A$

b) $(A \subset B) \wedge (B \subset A) \Rightarrow A = B$

c) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Rightarrow A \subset C$

Verknüpfung zweier Mengen (2.9)

$$A \cup B := \{x \,|\, (x \in A) \vee (x \in B)\} \quad \text{Vereinigung}$$
$$A \cap B := \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \in B)\} \quad \text{Durchschnitt}$$
$$A \setminus B := \{x \,|\, (x \in A) \wedge (x \notin B)\} \quad \text{Komplement}$$

Regeln der Mengenalgebra (2.10)

Kommunitativgesetze

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Assoziativgesetze

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

Absorptionsgesetze

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Distributivgesetze

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Erweiterung auf mehrere Mengen (2.11):

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i := A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

Man zeigt per vollst. Induktion, dass das Ergebnis jeweils unabhängig von der Reihenfolge der Operationen ist.

Ist $(A_\nu)_{\nu \in L}$ eine Familie von Mengen mit der Indexmenge L, so definiert man

$$\bigcup_{\nu \in L} A_\nu := \{x \,|\, \exists \nu \in L : x \in A_\nu\}$$
$$\bigcap_{\nu \in L} A_\nu := \{x \,|\, \forall \nu \in L : x \in A_\nu\}$$

Potenzmenge (2.12): $\mathcal{P}(M) := \{X \,|\, X \subset M\}$.

Für jede Menge M gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, sowie $M \in \mathcal{P}(M)$.

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\} \quad \Rightarrow$
$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Eigenschaften (2.13): $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$, aber i.Allg. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Definition (2.14): Für endliche Mengen M bezeichnet $\#M$ die *Kardinalzahl* oder *Mächtigkeit* von M, d.h. die Anzahl der Elemente von M.

Satz (2.15): $\#\mathcal{P}(M) = 2^{\#M}$.

Definition (2.16): Sind A, B Mengen, $x \in A$ und $y \in B$, so heißt (x, y) ein *geordnetes Paar.* Es wird definiert

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \ :\Leftrightarrow \ x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 = y_2.$$

Analog werden für mehrere Mengen A_i, $i = 1, \ldots, n$, und $x_i \in A_i$ durch $(x_1, \ldots, x_n)$ *geordnetes n-Tupel* definiert. Hierbei ist wieder zu beachten

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \ :\Leftrightarrow\ \forall\, i = 1, \ldots, n : \ x_i = y_i.$$

Die Menge aller geordneten Paare, bzw. aller geordneten n-Tupel wird als *Cartesisches Produkt* der beteiligten Mengen bezeichnet, benannt nach René Descartes (1596–1659):

$$\begin{aligned} A \times B &:= \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}, \\ A^2 &:= A \times A, \\ \prod_{i=1}^{n} A_i &:= \{(a_1, \ldots, a_n) |\ \forall i \in \{1, \ldots, n\} : a_i \in A_i\}, \\ A^n &:= \prod_{i=1}^{n} A \ = \ A \times A \times \cdots \times A. \end{aligned}$$

Eigenschaften (2.17): Für kartesische Produkte gilt

a) $$\#(A \times B) = (\#A) \cdot (\#B)$$

b) $$\begin{aligned}(M_1 \cup M_2) \times M_3 &= (M_1 \times M_3) \cup (M_2 \times M_3)\\ (M_1 \cap M_2) \times M_3 &= (M_1 \times M_3) \cap (M_2 \times M_3)\end{aligned}$$

c) $M \times \emptyset = \emptyset \times M = \emptyset.$

Definition (2.18): Ist G eine Grundmenge, so wird das *Komplement* einer Menge $M \subset G$ bzgl. G definiert durch

$$\overline{M} := \{x \in G : x \notin M\}.$$

Eigenschaften (2.19):

$$\begin{aligned}M_1 \setminus M_2 &= M_1 \cap \overline{M_2}\\ M_1 \cup \overline{M_1} &= G\\ M_1 \cap \overline{M_1} &= \emptyset\\ \overline{M_1 \cup M_2} &= \overline{M_1} \cap \overline{M_2}\\ \overline{M_1 \cap M_2} &= \overline{M_1} \cup \overline{M_2}\end{aligned}$$

Georg Cantor
(1845-1918)

Bertrand Russell
(1872-1970)