Universität Hamburg **WiSe 2013/14**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle

A p p r o x i m a t i o n

8. Übung

Aufgabe 29:

Mit $\operatorname{sign}(u) := \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad u > 0 \\ 0, & \quad '' \quad u = 0 \\ -1, & \quad '' \quad u < 0 \end{cases}$ sei $\sigma_{n+1}(t) := \operatorname{sign}[\sin((n+1)t)]$,

$(t \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$.

Zeigen Sie : Für $k = 0, 1, \ldots, n$ gilt: $\displaystyle\int_0^\pi \sin(kt)\, \sigma_{n+1}(t)\, dt = 0.$

Hinweis: Formen Sie das Integral $J_m := \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\,m\,t}\, \sigma_{n+1}(t)\, dt$ $(m \in \mathbb{Z})$ mittels der Substitution $t = \tau + \dfrac{\pi}{n+1}$ um.

Aufgabe 30:

Zu den Stützstellen (t_k, f_k), $k = 0, 1, \ldots, n$ mit $t_k = k/n$ und $f_0 = f_n$ sei $s \in S_1(t_0, \ldots, t_n)$ der interpolierende lineare Spline.

Zeigen Sie, dass für die (komplexen) Fourier-Koeffizienten $c_k = \int_0^1 s(t)\, e^{-2\pi i k t}\, dt$, $k \in \mathbb{Z}$, der (1-periodisch fortgesetzten) Funktion s gilt:

$$c_k = \frac{\tau_k}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f_j\, e^{-ij\,k\,\frac{2\pi}{n}}, \qquad \tau_k = \begin{cases} 1 & : \text{ für } \quad k = 0 \\ \dfrac{\sin^2(k\pi/n)}{(k\pi/n)^2} & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Die τ_k heißen *Abminderungsfaktoren.*

Hinweis: Verwenden Sie die Basisdarstellung (5.17), $s(t) = \sum_{j=0}^{n} f_j\, B_{1,j-1}\,(t)$, und die Substitution $x = t - j/n$.

Aufgabe 31: Invarianz unter Symmetrien

Sei $B \subset \mathbb{R}$ eine kompakte Menge, V ein $(n+1)$–dimensionaler linearer Teilraum von $R := C(B)$ und $f \in R$.

Weiter sei $T : B \to B$ eine stetige Abbildung und $A : R \to R$ eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften $(A\,h) \circ T \in V$ $(\forall h \in V)$ und $\|A\,g\| \leq \|\,g\,\|$ $(\forall\, g \in R)$.

Schließlich erfülle f die folgende Symmetrieeigenschaft

$$(A\,f)(T(t)) \;=\; f(t) \quad \text{für alle} \quad t \in B.$$

Zeigen Sie: Ist p^* die eindeutig bestimmte Tschebyscheff-Bestapproximation von f bezüglich V, so besitzt auch p^* die obige Symmetrieeigenschaft.

Was bedeutet dies in den Fällen
a) $B = [-1,1]$, $T(t) = -t$, $A = id$ bzw.
b) $B = [-1,1]$, $T(t) = -t$, $A = -id$?

Aufgabe 32: Nochmals Tschebyscheff-Entwicklung

a) Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Tschebyscheff-Polynome

$$\begin{array}{lrcl} \text{(i)} & T_k(x)\,T_\ell\,(x) & = & \frac{1}{2}\big(T_{k+\ell}\,(x) \;+\; T_{|k-\ell|}(x)\big) \\ \text{(ii)} & T_k(T_\ell\,(x)) & = & T_{k\,\ell}\,(x) \end{array}$$

b) Folgern Sie aus (ii): $T_{2\,k}(x) \;=\; T_k(2\,x^2 - 1)$. Welche Vereinfachung ergibt hieraus für die Auswertung der T-Entwicklung einer geraden Funktion?

c) Zeigen Sie mit (i):
Zwischen den T-Koeffizienten der Funktion $f(x) := x \cdot g(x)$ und denen der Funktion $g \in \mathrm{C}^1[-1,1]$, gelten die folgenden Beziehungen

$$c_0[x \cdot g] \;=\; c_1[g], \quad c_k[x \cdot g] \;=\; \frac{1}{2}\big(c_{k-1}[g] + c_{k+1}[g]\big),\;\; k \geq 1.$$

d) Bestimmen Sie die (ersten acht) Koeffizienten der T-Entwicklung

$$\sin(\frac{\pi}{2}\,x) \;=\; x \cdot \{\, \frac{c_0^*}{2} \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} c_{2\,k}^*\,T_{2\,k}(x)\,\}, \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

und werten sie die bei $k = 7$ abgebrochenen Partialsumme auf $[0,1]$ mit dem Clenshaw Algorithmus aus. Plotten Sie die Fehlerfunktion.

Abgabetermin: 9.12.2013, vor der Übung.