Universität Hamburg **WiSe 2013/14**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle

Approximation

7. Übung

Aufgabe 25/26: L$_2$–Approximation durch einen Kreis

Zu vorgegebenen Punkten $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, $k = 0, 1, \ldots, n$, soll ein Kreis $\mathbf{c}(\varphi) = (a + r\cos\varphi,\ b + r\sin\varphi)^{\mathrm{T}}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, so bestimmt werden, so dass der folgende Approximationsfehler minimiert wird

$$\rho(a, b, r, \varphi_0, \ldots, \varphi_n) := \sum_{k=0}^{n} \left[(x_k - c_1(\varphi_k))^2 + (y_k - c_2(\varphi_k))^2 \right].$$

a) Bei gegebenen $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ führen die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial \rho}{\partial a} = \frac{\partial \rho}{\partial b} = \frac{\partial \rho}{\partial r} = 0$$

auf ein lineares Gleichungssystem für a, b, r. Stellen Sie dieses auf und geben Sie dessen Lösung in Abhängigkeit von $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ explizit an.

b) Bei gegebenen a, b, r führen die notwendigen Bedingungen

$$\frac{\partial \rho}{\partial \varphi_k} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial \varphi_k^2} \ge 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

auf $n+1$ separierte nichtlineare Gleichungen. Auch hierfür lassen sich die Lösungen explizit angeben.

c) Formulieren Sie unter Verwendung von a) und b) einen Algorithmus zur Berechnung eines Ausgleichskreises.

d) Schreiben Sie ein Programm zur numerischen Berechnung der L$_2$–Bestapproximation durch Ausgleichskreise. Lösen Sie damit das Approximationsproblem für die folgenden Datensätze

i)

x_k	:	5	10	7	9	2	0	−1	−1
y_k	:	−3	3	5	9	8	3	−1	7

ii)

x_k	:	1	2	5	7	9	3
y_k	:	7	6	8	7	5	7

Fertigen Sie jeweils Plotts, in denen der Ausgleichskreis und die Messpunkte eingezeichnet sind.

Aufgabe 27:

a) Wie lautet die komplexe Fourier-Reihe der 2π-periodisch fortgesetzten Funktion

$$f(x) = e^{ax}, \qquad x \in [0, 2\pi), \quad a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}?$$

b) Geben Sie die Fourier-Reihe der 2π-periodisch fortgesetzten Funktion

$$f(x) = \sinh x, \qquad x \in [0, 2\pi)$$

an (sowohl in komplexer als auch in reeller Schreibweise).

Aufgabe 28:

Die Funktion $f(x) = 2x - 1,\ 0 \leq x \leq 1$, soll durch ein trigonometrisches Polynom der Form

$$p_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k \ \cos(k\pi x)$$

approximiert werden.

Bestimme Sie ein minimales $n \in \mathbb{N}$, so dass $\int_0^1 (f(x) - p_n(x))^2 \, dx \ \leq \ 10^{-4}$ ist und geben Sie die zugehörige Approximation p_n an.

Hinweis:

Fourier-Entwicklung der gerade und 2–periodisch fortgesetzten Funktion f.

Abgabetermin: 2.12.2013, vor der Übung.