Universität Hamburg **WiSe 2013/14**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle

A p p r o x i m a t i o n

5. Übung

Aufgabe 17:

Es bezeichnen $B_k^n(t)$, $0 \le t \le 1$, die Bernstein-Polynome n-ten Grades, $k = 0, \dots, n$. Untersuchen Sie die folgenden Eigenschaften dieser Polynome:

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von B_k^n und deren Vielfachheit.

b) Die B_k^n sind nichtnegativ auf $[0, 1]$ und bilden dort eine Zerlegung der Eins.

c) Bestimmen Sie das Maximum von B_k^n im Intervall $[0, 1]$.

d) Zeigen Sie: Es gilt die Rekursionsformel $(n = 1, 2, \dots,\ k = 0, \dots, n)$:

$$B_k^n(t) \;=\; t\, B_{k-1}^{n-1}(t) \;+\; (1-t)\, B_k^{n-1}(t).$$

Anfangs-/Randwerte: $B_0^0(t) := 1$, $B_{-1}^{n-1}(t) := B_n^{n-1}(t) := 0$.

e) Die $(B_0^n, \dots, B_n^n)$ bilden eine Basis des Polynomraumes Π_n.

f) Fertigen Sie Zeichnungen der Bernstein-Polynome $B_k^4(t)$, $k = 0, 1, \dots, 4$, auf dem Intervall $[0, 1]$ an. Verwenden Sie zur Auswertung der Bernstein-Polynome dabei die Rekursionsformel aus d).

g) Berechnen Sie die Bernstein-Approximationen $(B_n f)(t)$ für die Funktion $f(t) = 1/(1 + 25(2t-1)^2)$ auf $[0, 1]$ und zeichnen Sie f zusammen mit den Approximationen $(B_n f)$ für $n = 10,\ 50,\ 100$.

Aufgabe 18:

a) Zeigen Sie, dass der Interpolationsoperator $P_n : C[a, b] \to \Pi_n[a, b]$ zu vorgegebenen Interpolationsknoten $a \le t_0 < t_1 < \dots < t_n \le b$ im Allgemeinen nicht monoton ist.

Konstruieren Sie hierzu ein Gegenbeispiel mit $n = 2$ und $a = t_0 < t_1 < t_2 = b$.

b) Leiten Sie für $n = 1$ eine notwendige und hinreichende Bedingung an die Interpolationsknoten her, unter der P_1 monoton ist.

Aufgabe 19/20: (C^1-Spline nach Ellis, McLain, 1977)

Gegeben sei ein Gitter $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ sowie die Daten $f_i := f(t_i)$ einer stetigen Funktion $f \in C[a, b]$.

a) Sei $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Zeigen Sie, dass es zu vorgegebenen Daten f_i, f_{i+1}, f'_i, f'_{i+1} ein eindeutig bestimmtes Interpolationspolynom $p_i \in \Pi_3[t_i, t_{i+1}]$ gibt mit:

$$p_i(t_i) = f_i,\ \ p_i(t_{i+1}) = f_{i+1},\ \ p'_i(t_i) = f'_i,\ \ p'_i(t_{i+1}) = f'_{i+1}.$$

Dieses ist gegeben durch

$$p_i(t) = f_i\,(1-3\tau^2+2\tau^3)+f_{i+1}\,(3\tau^2-2\tau^3)+f'_i\,h_i\,(\tau-2\tau^2+\tau^3)+f'_{i+1}\,h_i\,(-\tau^2+\tau^3)$$

mit $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $h_i := t_{i+1} - t_i$, und $\tau := \dfrac{t - t_i}{h_i}$.

b) Für $i \in \{2, \ldots, n-2\}$ bezeichne $q_i \in \Pi_2[t_{i-2}, t_{i+2}]$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen (t_j, f_j), $j = i-1, i, i+1$. Berechnen Sie $q'_i(t_i)$.

c) Für $i \in \{2, \ldots, n-2\}$ definiere man $f_{i,\ell} := f_{i-2} - q_i(t_{i-2})$ und $f_{i,r} := f_{i+2} - q_i(t_{i+2})$. Ferner werde ein Polynom $r_i \in \Pi_3[t_{i-2}, t_{i+2}]$ festgelegt durch die Interpolationsbedingungen $r_i(t_j) = 0$, für $j = i-1, i, i+1$, und der Forderung $[r_i(t_{i-2}) - f_{i,\ell}]^2 + [r_i(t_{i+2}) - f_{i,r}]^2$ minimal.

Geben Sie eine explizite Formel zur Berechnung von $r'_i(t_i)$ an.

d) Der interpolierende kubische C^1-Spline $s(t)$ nach *Ellis, McLain* wird nun insgesamt wie folgt festgelegt: In allen Teilintervallen $[t_i, t_{i+1}]$ wird $s(t) := p_i(t)$ nach Teil a) berechnet. Die hierzu benötigten Daten $(f'_0, \ldots, f'_n)$ werden wie folgt ermittelt.

Die Ableitungswerte f'_0, f'_1 und f'_{n-1}, f'_n werden festgelegt durch $f'_i := q'(t_i)$, wobei jeweils $q \in \Pi_3$ das Interpolationspolynom mit $q(t_j) = f_j$ für $j = 0, 1, 2, 3$ bzw. $j = n-3, n-2, n-1, n$ bezeichnet. Verwenden Sie die Newton-Darstellung um explizite Ausdrücke für diese f'_i zu erhalten.

Für $i = 2, \ldots, n-2$ wird gesetzt $f'_i := p'_i(t_i)$. Dabei ist $p_i \in \Pi_3$ durch die Interpolationsbedingungen $p_i(t_j) = f_j$, $j = i-1, i, i+1$ sowie durch die Forderung „$[p_i(t_{i-2}) - f_{i-2}]^2 + [p_i(t_{i+2}) - f_{i+2}]^2$ minimal“ festgelegt. Hierzu werden die Ergebnisse aus b) und c) verwendet.

Formulieren Sie einen Algorithmus zur Berechnung des C^1-Splines $s(t)$.

Abgabetermin: 18.11.2013, vor der Übung.