**Universität Hamburg** **WiSe 2013/14**
**Fachbereich Mathematik**
Prof. Dr. H. J. Oberle

# A p p r o x i m a t i o n

## 4. Übung

**Aufgabe 13:**

a) Zeigen Sie: Jede Funktion $f \in \mathrm{C}^1[-1,1]$ besitzt eine auf $[-1,1]$ gleichmäßig konvergente *Tschebyscheff-Entwicklung*

$$f(x) \;=\; \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, T_k(x), \qquad c_k \;=\; \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\, T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx.$$

*Hinweis:* Verwenden Sie die Fourier-Entwicklung der geraden und $2\pi$- periodischen Funktion $g(t) := f(\cos t)$.

b) Die T-Koeffizienten der Funktion $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$, $-1 \le x \le 1$, lauten

$$c_k \;=\; \begin{cases} 0, & \text{für } \; k \text{ gerade,} \\ (-1)^m\, 2\, J_k(\frac{\pi}{2}) & \text{für } \; k = 2m+1, \end{cases}$$

wobei $J_k(x)$, $k \in \mathbb{N}_0$, die Bessel-Funktionen erster Art bezeichnen.

**Aufgabe 14:**

Eine Funktionsfolge $p_k \in \mathrm{C}[a,b]$, $k \in \mathbb{N}_0$, genüge einer *Dreitermrekursion*

$$p_k(t) \;:=\; a_k(t)\, p_{k-1}(t) \;+\; b_k(t)\, p_{k-2}(t), \;\; k = 2,3,\ldots, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

Hierbei seien die Anfangsfunktionen $p_0$, $p_1 (= a_1\, p_0)$, sowie die Koeffizientenfunktionen $a_k$, $b_k$ in $\mathrm{C}[a,b]$ vorgegeben.

Zeigen Sie, dass sich eine Summe $f_n(t) \;=\; \sum\limits_{k=0}^{n} c_k\, p_k(t)$, $a \le t \le b$, durch den folgenden *Algorithmus von Clenshaw* berechnen lässt

$$\begin{aligned} & z_n := c_n; \quad z_{n-1} := c_{n-1} + a_n(t) z_n; \\ & \text{für} \quad k = n-2,\, n-3,\, \ldots,\, 0 \;: \\ & \qquad z_k := c_k + a_{k+1}(t)\, z_{k+1} + b_{k+2}(t)\, z_{k+2}; \\ & f_n(t) := p_0(t)\, z_0. \end{aligned}$$

Welcher Algorithmus ergibt sich speziell für die Auswertung einer Tschebyscheff-Entwicklung?

**Aufgabe 15:**

a) Geben Sie die Zahlenwerte $c_k,\ \ k = 1, \dots, 9$ aus Aufgabe 13 b) explizit an, werten Sie die Partialsumme $f_9(x) := c_0/2 + \sum_1^9 c_k T_k(x)$ mittels des Clenshaw-Verfahrens aus (MATLAB). Zeichnen Sie ferner die Fehlerfunktion $e(x) := \sin(\pi x/2) - f_9(x)$.

b) Der natürliche Logarithmus besitzt die T-Entwicklung

$$\ln(1+x) = c_0/2 \ + \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, T_k(2x-1), \quad 0 \le x \le 1$$

mit $c_0 = 2\ \ln\left(\dfrac{3+\sqrt{8}}{4}\right)$ und $c_k = (-1)^{k+1}\dfrac{2}{k(3+\sqrt{8})^k}, \quad k \ge 1.$

Berechnen Sie mittels des Clenshaw-Verfahrens die aus den ersten $n+1$ Summanden bestehende Partialsumme $f_n(x)$ der obigen Reihe sowie den Fehler $e_n(x) := \ln(1+x) - f_n(x)$ für $x = 0, 0.1, 0.2, \dots, 1.0$ und $n = 5, 10, 15$ (Tabellen). Zeichnen Sie ferner die Fehlerfunktion $e_n$ auf $[0,1]$ für $n = 5, 10, 15$.

**Aufgabe 16:**

Führen Sie die Schritte (A), (B) und (C) für den Beweis von Satz (4.5) (Satz von Korovkin II) aus.

Betrachten Sie dazu in Schritt (A) zu einer Folge linearer, positiver Funktionale $\Phi_n : \mathrm{C}_{2\pi} \to \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ die Hilfsfunktion $\psi_\alpha(x) := \sin^2\left(\dfrac{x-\alpha}{2}\right)$ und beweisen Sie eine Abschätzung der Form

$$\forall\, x \in \mathbb{R}: \ -\varepsilon - \frac{2\,M}{\sin^2(\delta/2)}\,\psi_\alpha(x) \ \le\ f(x) - f(\alpha) \ \le\ \varepsilon + \frac{2\,M}{\sin^2(\delta/2)}\,\psi_\alpha(x).$$

Schließen Sie in Schritt (B), dass aus der Konvergenz $\Phi_n(1) \to 1$, $\Phi_n(\cos) \to \cos\alpha$ und $\Phi_n(\sin) \to \sin\alpha$ $(n \to \infty)$ auch die Konvergenz $\Phi(\psi_\alpha) \to 0$ $(n \to \infty)$ folgt.

---

**Abgabetermin:** 11.11.2013, vor der Übung.