Universität Hamburg
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle

WiSe 2013/14

A p p r o x i m a t i o n

2. Übung

Aufgabe 5:

Es sei G die Menge aller Geraden des $\mathbb{R}^3$ (eindimensionale affinen Unterräume) mit der Parametrisierung $\quad g(t) \;=\; a + t\, b,\;\; t \in \mathbb{R}, \quad a,\; b \in \mathbb{R}^3,\;\; \|b\|_2 = 1.$ Zeigen Sie:

a) Zu $x \in \mathbb{R}^3$ und $g \in G$ (mit obiger Parametrisierung) gibt es genau ein $t^* \in \mathbb{R}$ mit

$$d(a,b,x) \;:=\; \|x - g(t^*)\|_2 \;:=\; \min_{t\in\mathbb{R}} \|x - g(t)\|_2$$

und es gilt die Abschätzung $t^* \leq 2\|a - x\|_2$.

b) Die Abbildung $(a,b,x) \mapsto d(a,b,x)$ ist stetig.

c) Zu einer endlichen, nichtleeren Menge $S = \{x_1, \ldots, x_m\} \subset \mathbb{R}^3$ gibt es eine *Ausgleichsgerade* $g^* \in G$ mit der Parametrisierung $g^*(t) \;=\; a^* + t\, b^*,\;\; t \in \mathbb{R}$, $\|b^*\|_2 = 1$, so dass der maximale Abstand der Punkte x_k von g^*

$$d(a^*, b^*) \;:=\; \max_{k=1,\ldots,m} d(a^*, b^*, x_k)$$

minimal ist.

Aufgabe 6:

Auf dem Raum $\mathrm{C}[-\pi, \pi]$ werde die folgende Norm betrachtet

$$\|g\| \;:=\; \|g\|_1 \;+\; \|g\|_\infty \quad (g \in \mathrm{C}[-\pi, \pi]).$$

a) Untersuchen Sie die Approximationsaufgabe „Minimiere $\|f - p\|$ über $p \in V$“ für $f(t) := t,\; -\pi \leq t \leq \pi$, und $V := \mathrm{Spann}\{\sin^2 t\} \subset \mathrm{C}[-\pi, \pi]$ im Hinblick auf die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung. *Hinweis*: Symmetrie!

b) Folgern Sie hieraus, dass die obige Norm nicht strikt konvex ist.

Aufgabe 7:

Es sei $(R, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, der *nicht strikt normiert* ist.
Es soll gezeigt werden, dass dann die Approximationsaufgabe im Allg. *nicht eindeutig* lösbar ist.

Genauer ist zu zeigen: Es gibt ein Element $f \in R$ sowie einen nichtleeren, linearen Teilraum V von R und Approximationen $p_1, p_2 \in V$ mit $p_1 \neq p_2$ und $\|f - p_1\| = \|f - p_2\| = d_V(f)$.

Hinweis:
Seien $f_1, f_2 \in R$ mit $f_1 \neq f_2$, $\|f_1\| = \|f_2\| = 1$ und $\|f_1 + f_2\| = 2$.
Setzen Sie dann $f := 0.5(f_1 + f_2)$ und $V := \{\, t(f_1 - f_2) : t \in \mathbb{R}\}$ und zeigen Sie, dass durch $\varphi(t) := \|f - t(f_1 - f_2)\|$ eine konvexe Funktion definiert wird mit $\varphi(-0.5) = \varphi(0) = \varphi(0.5) = 1$. Welche Folgerung ergibt sich hieraus?

Aufgabe 8:

Es sei $(R, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, V ein nichtleerer linearer Teilraum von R und $f \in R$ ein Element mit positiver Minimalabweichung $d_V(f) > 0$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Sei $U := \mathrm{Spann}(V \cup \{f\})$ der von V und f aufgespannte lineare Teilraum von R. Zu jedem $g \in U$ existiert dann eine eindeutige Darstellung $g = \alpha_g f + p_g$ mit $\alpha_g \in \mathbb{R}$ und $p_g \in V$.

b) Die Abbildung $l_0 : U \to \mathbb{R}$ definiert durch $l_0(g) := \alpha_g\, d_V(f)$ ist ein stetiges lineares Funktional, also $l_0 \in U^*$.

c) Es gelten
$$l_0|_V = 0, \quad \|l_0\| = 1, \quad l_0(f) = d_V(f).$$

Abgabetermin: 28.10.2013, vor der Übung.