Universität Hamburg **WiSe 2013/14**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle

A p p r o x i m a t i o n

12. Übung

Aufgabe 45:

Das diskrete Approximationsproblem mit $B = \{t_1, \ldots, t_m\} \subset [a, b]$:

$$\text{Minimiere } \max\{|f(t) - \sum_{i=0}^{n} a_i h_i(t)| \; : \; t \in B\} \quad \text{über} \quad a_i \in \mathbb{R}$$

kann als eine lineare Optimierungsaufgabe in Dualform geschrieben werden. Deren Primalproblem ist von der Form: Minimiere $J_P = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ unter den Nebenbedingungen $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{c}$, $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$, mit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{2m}$; man vergleiche hierzu Abschnitt 9 des Skripts.

a) Zeigen Sie: Genügt $V =$ Spann$(h_0, \ldots, h_n)$ der Haarschen Bedingung und ist $\mathbf{y}$ ein zulässiger Basisvektor des Primalproblems mit der Komplementaritätsbedingung $y_j \cdot y_{m+j} = 0$, so ist $\mathbf{y}$ nicht entartet.

b) Es seien $m = 5$, $t_i = i - 1$, $n = 2$ und $h_k(t) = t^k$, $k = 0, 1, 2$.
Zeigen Sie, dass $\mathbf{y} = (0.5, 0, 0, 0, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ ein entarteter Basisvektor des Primalproblems ist. Warum ist dies kein Gegenbeispiel zu a)?

Aufgabe 46: (Programmieraufgabe)

Schreiben Sie ein Programm zur Lösung einer diskreten Tschebyscheffschen Approximationsaufgabe

$$\text{Minimiere } \max_{k=1,\ldots,m} |f(t_k) - \sum_{j=0}^{n} a_j \, h_j(t_k)|$$

durch Transformation in eine duale lineare Optimierungsaufgabe. Verwenden Sie zur numerischen Lösung der zugehörigen primalen Optimierungsaufgabe das Simplex-Verfahren *linprog* aus MATLAB. Erstellen Sie auch jeweils eine graphische Darstellung der Fehlerfunktion.

Testbeispiele:

a) $f(t) = e^t$, $p(t) = \sum_{j=0}^{4} a_j t^j$, $t_k = (k-1)/10$, $\quad k = 1, \ldots, 11.$

b) $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, $p(t) = \sum_{j=0}^{6} a_j \, t^j$, $\quad B = [0, 2\pi]$ äquidistant diskretisiert.

Aufgabe 47:

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $\quad t_i = \dfrac{i\pi}{n+1}$, $\quad i = 1, \ldots, n$. $\quad$ Zeigen Sie:

a) Es gibt genau eine Funktion der Form $p(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \sin(kt)$ mit der Eigenschaft $p(t_i) = t_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

b) Die Funktion $e(t) := t - p(t)$ wechselt ihr Vorzeichen im Intervall $]0, \pi[$ genau an den Stellen $t_i, \quad i = 1, \ldots, n$.

c) Es gilt $\displaystyle\int_0^{\pi} |t - p(t)|\, dt = \frac{\pi^2}{2(n+1)}$.

Hinweis zu c): Verwenden Sie Aufgabe 29.

Aufgabe 48:

a) Es sei $\mathbf{p}(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} \mathbf{a}_j \cdot B_j^n(t)$, $\; 0 \leq t \leq 1$, eine Bézier-Kurve mit den Kontrollpunkten $\mathbf{a}_0, \ldots \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$. Ferner sei $\mathbf{L} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, mit $\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\,\mathbf{x} + \mathbf{b}$ eine affin lineare Abbildung ($\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{(m,m)}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$).

Zeigen Sie, dass die Bilder $\mathbf{b}_i := \mathbf{L}(\mathbf{a}_i)$ der Bézier-Punkte gerade die Bézier-Punkte der Bézier-Kurve $\mathbf{L} \circ \mathbf{p}$ sind.

b) Zeigen Sie, dass der Tangentialvektor an die Bézier-Kurve $\mathbf{p}(t)$ in $t = 0$ parallel zu $(\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0)$ liegt.

Abgabetermin: 20.1.2014, vor der Übung.