Universität Hamburg **WiSe 2013/14**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H. J. Oberle

A p p r o x i m a t i o n

11. Übung

Aufgabe 41/42: Remez-Algorithmus

Schreiben Sie ein MATLAB Programm zur Realisierung des Remez-Algorithmus mit Einzelaustausch. Ermitteln Sie zur Bestimmung der neuen Referenz $(t_i^{(k+1)})$ im k-ten Iterationsschnitt näherungsweise die lokalen Extrema der aktuellen Fehlerfunktion $e^{(k)} := f - p^{(k)}$ (Absuchen auf diskretem Gitter, Bisektion, ...). Beachten sie hierbei, dass die Konvergenz sichernden Bedingungen (9.8) des Skripts erfüllt werden. Beziehen Sie auch den Fall ein, dass die Randpunkte a, b eventuell nicht zur Alternante gehören können. Verwenden Sie als Abbruchskriterium:

$$\|f - p^{(k)}\|_\infty - |\mu_k| \ \leq \ \text{TOL} \cdot |\mu_k|, \qquad \text{TOL} \approx 10^{-10}.$$

Die Ausgabe soll neben den Ergebnisdaten $(p^* = \sum_{j=0}^{n} a_j h_j,\ (t_i),\ \|f - p^*\|_\infty)$ auch die Daten $t_i^{(k)}$, μ_k, $\|f - p^{(k)}\|_\infty$ der Zwischenschritte und eine Skizze der Fehlerfunktion $e^* = f - p^*$ enthalten.

Testbeispiele:

a) $f(t) \ = \ \dfrac{1}{1+t}, \quad 0 \leq t \leq 1$

$p(t) \ = \ a_0 + a_1 t + a_2 t^2, \quad a_i \in \mathbb{R}$

b) $f(t) \ = \ \dfrac{\sin t}{t}, \quad 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{6}$

$p(t) \ = \ a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4 + a_3 t^6, \quad a_i \in \mathbb{R}$

c) $f(t) \ = \ \sqrt[4]{t}, \quad 0 \leq t \leq 1$

$p(t) \ = \ a_0 + a_1 t + \ldots + a_6 t^6, \quad a_i \in \mathbb{R}$

d) $f(t) \ = \ \sin(5t), \quad 0 \leq t \leq \pi$

$p(t) \ = \ a_0 + a_1 e^t + a_2 e^{2t} + a_3 e^{3t}, \quad a_i \in \mathbb{R}$

Aufgabe 43:

Es sei $f \in C[a,b]$ eine strikt konvexe Funktion und $V := \Pi_1[a,b]$.

a) Zeigen Sie, dass $V_2 := \text{Spann}(\{f\} \cup V)$ die Haarsche Bedingung (mit $n = 2$) erfüllt.

b) Zur Berechnung der Bestapproximation von f aus V werde der Remez-Algorithmus mit Einzelaustausch durchgeführt. Die Startreferenz sei $M_0 = \{a, t_1, b\}$. Der neu einzufügende Punkt $\tau \in]a,b[$ erfülle die Beziehung

$$|f(\tau) - h^{(0)}(\tau)| = \|f - h^{(0)}\|_\infty.$$

Zeigen Sie, dass bereits der erste Austauschschritt die Bestapproximation liefert.

Aufgabe 44:

Es sei $f \in R := C^2[a,b]$. Ferner sei $V = \text{Spann}(h_0, \ldots, h_n)$ ein $(n+1)$-dimensionaler Haarscher Teilraum von R, der die konstanten Funktionen enthält und für den auch $\text{Spann}(\{f\} \cup V)$ der Haarschen Bedingung genügt.

Wir betrachten das nichtlineare Gleichungssystem

$$(*) \qquad \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} a_i h_i(t_j) - f(t_j) + (-1)^j \mu & = 0, \quad j = 0, \ldots, n+1 \\ \sum_{i=0}^{n} a_i h_i'(t_j) - f'(t_j) & = 0, \quad j = 1, \ldots, n \end{cases}$$

in den Unbekannten $z := (a_0, \ldots, a_n, \mu, t_1, \ldots, t_n)$ (mit $t_0 := a, t_{n+1} := b$).

a) Zeigen Sie: Ist $p = \sum a_i^* h_i$ Bestapproximation von f bezüglich V, so existieren Zahlen μ^* und $t_1^*, \ldots, t_n^*$, die das Gleichungssytem $(*)$ lösen. Gilt auch die Umkehrung hiervon?

b) Es sei z^* eine Lösung von $(*)$. Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass die Jacobi-Matrix der linken Seite von $(*)$ an der Stelle z^* regulär ist.

Abgabetermin: 13.1.2014, vor der Übung.