

6. L_2 - Approximation

Euklidische Räume.

Im Folgenden sei $(R, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Euklidischer Vektorraum, also ein reeller, linearer Raum mit einem Skalarprodukt. Bekanntlich lauten die Skalarprodukt-Axiome

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle &\geq 0, & \langle f, f \rangle = 0 &\Leftrightarrow f = 0, \\ \langle f, g \rangle &= \langle g, f \rangle, \\ \langle \alpha f_1 + \beta f_2, g \rangle &= \alpha \langle f_1, g \rangle + \beta \langle f_2, g \rangle. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Durch $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ wird die zugehörige Norm auf R definiert.

Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|; \tag{6.2}$$

dabei gilt die Gleichheit genau dann, wenn f, g linear abhängig sind.

Parallelogrammgleichung:

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2). \tag{6.3}$$

Die Norm eines Euklidischen Raumes ist stets strikt konvex, vgl. (2.11), damit ist die Eindeutigkeit der linearen Approximationsaufgabe gesichert, vgl. (2.14).

Charakterisierungssatz (6.4)

Ist $f \in R$ und ist V ein linearer Teilraum von R , so gilt: $p^* \in V$ ist genau dann eine Bestapproximation von f aus V , wenn der Fehler $e := f - p^*$ auf V senkrecht steht, also für alle $p \in V$ gilt: $\langle e, p \rangle = 0$.

Beweis: Siehe Satz (2.4). Die Abgeschlossenheit von V und die Vollständigkeit von R wurde dabei lediglich für die Existenz einer Bestapproximation benötigt, vgl. auch (2.3). □

Aus dem Charakterisierungssatz folgt unmittelbar die folgende Relation (*Satz des Pythagoras*) für eine Bestapproximation p^* von f

$$\|f\|^2 = \|f - p^*\|^2 + \|p^*\|^2. \tag{6.5}$$

Im folgenden Satz beschreiben wir, wie sich die Bestapproximation im Fall eines endlich dimensionalen linearen Raumes V berechnen lässt.

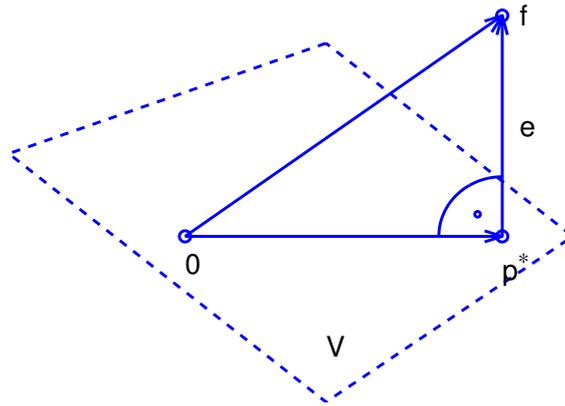


Abb. 6.1 Charakterisierungssatz.

Satz (6.6)

Sei V ein endlich dimensionaler linearer Teilraum von R .

a) Ist (h_0, \dots, h_n) eine Basis von V , also $\dim(V) = n+1$, so ist die Bestapproximation $p^* = \sum_0^n \alpha_j h_j$ von f aus V gegeben durch das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \langle h_0, h_0 \rangle & \dots & \langle h_n, h_0 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle h_0, h_n \rangle & \dots & \langle h_n, h_n \rangle \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, h_0 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, h_n \rangle \end{pmatrix}. \quad (6.7)$$

Die Koeffizientenmatrix $G(h_0, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^{(n+1, n+1)}$ ist symmetrisch und regulär (beachte Existenzsatz II), sie heißt *Gramsche Matrix*.

b) Ist (q_0, \dots, q_n) eine Orthonormalbasis (ONB) von V , so ist die Bestapproximation gegeben durch

$$p^* = \sum_{j=0}^n \langle f, q_j \rangle q_j. \quad (6.8)$$

(6.8) heißt auch *Fourier-Entwicklung* von f bzgl. der ONB (h_0, \dots, h_n) , die Koeffizienten $\langle f, q_j \rangle$ heißen auch *Fourier-Koeffizienten*.

Beweis: zu a): Nach (6.4) ist $p^* = \sum \alpha_j h_j$ genau dann Bestapproximation, wenn gilt

$$\begin{aligned} \forall k = 0, 1, \dots, n : \quad & \langle f - \sum_j \alpha_j h_j, h_k \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \forall k = 0, 1, \dots, n : \quad & \sum_j \langle h_j, h_k \rangle \alpha_j = \langle f, h_k \rangle. \end{aligned}$$

Dies ist ein eindeutig lösbares lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der α_j .

zu b) Im Fall einer ONB wird die Koeffizientenmatrix zur Einheitsmatrix $G(q_0, \dots, q_n) = I_{n+1}$, und damit folgt $\alpha_k = \langle f, q_k \rangle$ für alle $k = 0, 1, \dots, n$.

□

Bemerkung (6.9)

Sei (q_0, \dots, q_n) ONB von V . Wegen (6.5) folgt für die Bestapproximation p^* von f aus V

$$d_V(f)^2 = \|f - p^*\|^2 = \|f\|^2 - \|p^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=0}^n |\langle f, q_k \rangle|^2$$

und damit insbesondere die *Besselsche Ungleichung*

$$\sum_{k=0}^n |\langle f, q_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \quad (6.10)$$

Gleichheit liegt genau dann vor, wenn $f \in V$.

Folgerung (6.11)

Ist $(q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge orthonormaler Vektoren aus R und $V_n := \text{Spann}(q_0, \dots, q_n)$, so folgt für $f \in R$ aus der Besselschen Ungleichung, dass die Reihe $\sum_0^\infty |\langle f, q_k \rangle|^2$ (absolut) konvergiert, insbesondere gilt damit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, q_n \rangle = 0, \quad (6.12)$$

die Fourier-Koeffizienten bilden also eine Nullfolge!

Gilt darüber hinaus, dass der lineare Teilraum $V := \bigcup V_n$ in R dicht liegt (vgl. die Weierstraßschen Approximationssätze bzw. die Aussagen über die Splineräume), so gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} d_{V_n}(f) = 0$. Damit folgt aus (6.9) die so genannte *Parseval-Gleichung*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\langle f, q_k \rangle|^2 = \|f\|^2. \quad (6.13)$$

Beispiel (6.14)

Die Funktionen

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos t, \sin t, \sin(2t), \cos(2t), \dots$$

bilden ein Orthonormalsystem bzgl. des inneren Produktes

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) dt, \quad f, g \in C_{2\pi}.$$

Die Bestapproximation einer Funktion $f \in C_{2\pi}$ bezüglich des Raumes T_n (vgl. (4.14)) lautet damit

$$p^*(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)],$$

$$a_k = \langle f, \cos(kt) \rangle, \quad b_k = \langle f, \sin(kt) \rangle.$$

Beispiel (6.15)

Gegeben seien die Meßdaten

$$\begin{array}{rcccl} t_k : & 1 & 2 & 3 & \\ \hline y_k : & 2.0 & 2.8 & 4.2 & \end{array}$$

Gesucht ist eine bestapproximierende Gerade $p(t) = c_0 + c_1 t$ bezüglich der gewichteten Norm ($m > 0$)

$$\|g\|^2 := m g(t_0)^2 + 10 g(t_1)^2 + 10 g(t_2)^2; \quad g \in R := C(\{t_0, t_1, t_2\}).$$

Offensichtlich ist die Norm zugehörig zu dem entsprechenden Skalarprodukt, so dass wir die L_2 -Theorie anwenden können.

Wir wählen zunächst die Basis $h_0(t) = 1$, $h_1(t) = t$. Das lineare Gleichungssystem (6.7) lautet dann

$$\begin{bmatrix} m + 20 & m + 50 \\ m + 50 & m + 130 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m + 70 \\ 2m + 182 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem entspricht der Normalgleichung des linearen Ausgleichsproblems. Man sieht, dass die Koeffizientenmatrix für große Parameter m *schlecht konditioniert* ist. Die Berechnung der Bestapproximation über diesen Weg ist daher *numerisch instabil*.

Die Lösung des obigen Gleichungssystems lautet

$$c_0 = \frac{0.96 m}{m + 2}, \quad c_1 = \frac{1.04 m + 2.8}{m + 2}.$$

Alternativ könnte man eine orthogonale Basis wählen, die sich mit dem Gram-Schmidtschen Verfahren aus (h_0, h_1) gewinnen lässt (auf die Normierung wird hier verzichtet). Man erhält

$$p_0(t) = 1, \quad p_1(t) = t - \alpha, \quad \alpha = \frac{m + 50}{m + 20}.$$

Das zugehörige lineare Gleichungssystem (6.7) erhält dann die Form

$$\begin{bmatrix} m + 20 & 0 \\ 0 & \frac{50m + 100}{m + 20} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m + 70 \\ \frac{52m + 140}{m + 20} \end{pmatrix}.$$

Hieraus lassen sich die \tilde{c}_j numerisch stabil berechnen. Durch Umskalierung der ersten Gleichung lässt sich zudem erreichen, dass die Konditionszahl der Koeffizientenmatrix für $m \rightarrow \infty$ beschränkt bleibt.

Beispiel (6.16)

Sei $R := C[0, 1]$, $\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t) dt$ und $V_n := \Pi_n[0, 1]$.

Wählt man die Monome $(1, t, \dots, t^n)$ als Basis von V_n , so erhält man für die Gramsche Matrix

$$G(1, t, \dots, t^n) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/(n+1) \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n+2) \\ \vdots & & & \vdots \\ 1/(n+1) & \dots & \dots & 1/(2n+1) \end{bmatrix}.$$

Dies ist bekanntlich die *Hilbert-Matrix*, die für größere Werte von n schlecht konditioniert ist.

Als Abhilfe ergibt sich auch hier die Möglichkeit, eine orthogonale Basis mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Verfahrens zu konstruieren. Man erhält hierfür umskalierte Legendre-Polynome.

Orthogonale Polynome.

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall mit $a < b$. Sei $R := C[a, b]$ und $\omega :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine *stetige, positive* Gewichtsfunktion, für die das Integral $\int_a^b \omega(t)f(t) dt$ für alle Funktionen $f \in C[a, b]$ (im uneigentlichen Sinn) existiert.

Durch

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b \omega(t) f(t) g(t) dt \quad (6.17)$$

wird dann ein Skalarprodukt auf R erklärt.

Als Teilräume für eine L_2 -Approximation untersuchen wir die Polynomräume $V_n := \Pi_n[a, b]$ und bestimmen hierzu eine Orthogonal- bzw. Orthonormalbasis von V_n bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Da die Normierung in der üblichen Form, nämlich $\|q_k\| = 1$, noch Freiheiten lässt und zudem kompliziertere Wurzeln auftreten, wählen wir statt dessen die *Normierungsbedingung*

$$p_k = t^k + a_{k-1}t^{k-1} + \dots + a_0, \quad (6.18)$$

also höchster Koeffizient = 1, die die Eindeutigkeit erzwingt und zudem $p_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1}$ ergibt.

Satz (6.19) (Über Orthogonalpolynome)

a) Es gibt eine eindeutig bestimmte Folge von Orthogonalpolynomen $(p_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit $p_k \in \Pi_k \setminus \Pi_{k-1}$, $\langle p_j, p_k \rangle = 0$ für $j \neq k$, und der Normierungsbedingung (6.18).

b) Die (p_k) genügen der *Dreitermrekursion*

$$\begin{aligned} p_k(t) &= (t - a_k) p_{k-1}(t) - b_k p_{k-2}(t), \quad k = 2, 3, \dots, \\ a_k &= \frac{\langle t p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}, \quad b_k = \frac{\langle t p_{k-1}, p_{k-2} \rangle}{\langle p_{k-2}, p_{k-2} \rangle}, \end{aligned} \quad (6.20)$$

Startwerte sind $p_0(t) := 1$, $p_1(t) := t - a_1$.

c) Das Orthogonalpolynom p_k besitzt genau k einfache Nullstellen, die sämtlich im offenen Intervall $]a, b[$ liegen.

Beweis: zu a), b): Mit $k \geq 1$ und $p_0 := 1$ seien bereits normierte, orthogonale Polynome p_0, \dots, p_{k-1} konstruiert worden. Für das gesuchte Polynom p_k gilt dann aufgrund der Normierungsbedingung $p_k - t p_{k-1} \in \Pi_{k-1}$ und somit nach Satz (6.6)b) (Fourier-Entwicklung)

$$p_k - t p_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle p_k - t p_{k-1}, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} p_j = - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\langle t p_{k-1}, p_j \rangle}{\langle p_j, p_j \rangle} p_j.$$

Die letzte Gleichheit besteht, da p_k senkrecht auf Π_{k-1} stehen soll.

Für $j < k - 2$ gilt nun $\langle t p_{k-1}, p_j \rangle = \langle p_{k-1}, t p_j \rangle = 0$, da $t p_j \in \Pi_{k-2}$. Damit bleiben von der obigen Summe nur zwei Summanden bestehen und wir haben

$$\begin{aligned} p_k &= \left(t - \frac{\langle t p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle} \right) p_{k-1} - \frac{\langle t p_{k-1}, p_{k-2} \rangle}{\langle p_{k-2}, p_{k-2} \rangle} p_{k-2} \\ &= (t - a_k) p_{k-1} - b_k p_{k-2}. \end{aligned}$$

Umgekehrt zeigt man auch unmittelbar, dass durch obige Relation ein normiertes Polynom p_k definiert wird, das auf Π_{k-1} senkrecht steht.

zu c): Seien $t_1 < t_2 < \dots < t_m \in]a, b[$ die $m \in \{0, 1, \dots, k\}$ Punkte, an denen p_k das Vorzeichen wechselt. Man beachte: Alle Nullstellen eines Polynoms $p \neq 0$ sind isolierte Nullstellen! Nullstellen, an denen kein Vorzeichenwechsel stattfindet werden nicht mitgezählt. Somit wechselt $q(t) := (t - t_1) \dots (t - t_m)$ an den gleichen Stellen das Vorzeichen. Damit folgt, dass $\omega \cdot q \cdot p_k$ überhaupt keinen Vorzeichenwechsel in $]a, b[$ besitzt, also

$$\langle q, p_k \rangle = \int_a^b \omega(t) q(t) p_k(t) dt \neq 0.$$

gilt.

Nun steht p_k nach Konstruktion auf Π_{k-1} senkrecht, damit muss $m = \text{grad}(q) \geq k$, also $m = k$ sein. Da p_k als Polynom k -ten Grades aber nicht mehr als k Nullstellen

besitzen kann, sind die t_1, \dots, t_m sämtliche und lauter einfache Nullstellen von p_k , die zudem alle in $]a, b[$ liegen. \square

Beispiel (6.21) (Legendre-Polynome)

Hier ist $[a, b] = [-1, 1]$, $\omega(t) = 1$. Die Orthogonalpolynome sind gegeben durch die *Formel von Rodrigues*

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n] \quad (6.22)$$

Normierung:

$$P_n(t) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{n!} t^n + \dots$$

$$\int_{-1}^1 P_k(t) P_\ell(t) dt = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq \ell, \\ 2/(2n+1), & \text{für } k = \ell. \end{cases}$$

Dreitermrekursion:

$$P_{n+1}(t) = \frac{2n+1}{n+1} t P_n(t) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(t), \quad n \geq 1, \quad (6.23)$$

$$P_0(t) = 1, \quad P_1(t) = t.$$

Differentialgleichung: (Legendresche Differentialgleichung)

$$(t^2 - 1) y'' + 2t y' - n(n+1) y = 0, \quad n \geq 0. \quad (6.24)$$

Zweite Lösung von (6.24): $Q_n(t) = P_n(t) \int \frac{dt}{(t^2 - 1) P_n^2(t)}$.

Beispiel (6.25) (Tschebyscheff-Polynome)

Hier ist $[a, b] = [-1, 1]$, $\omega(t) = 1/\sqrt{1-t^2}$. Die Orthogonalpolynome sind gegeben durch

$$T_n(t) = \cos[n \arccos t], \quad t \in [-1, 1], \quad (6.26)$$

Normierung:

$$T_n(t) = 2^{n-1} t^n + \dots$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_k(t) T_\ell(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \begin{cases} 0, & \text{für } k \neq \ell, \\ \pi/2, & \text{für } k = \ell \neq 0, \\ \pi & \text{für } k = \ell = 0. \end{cases}$$

Dreitermrekursion:

$$T_{n+1}(t) = 2t T_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n \geq 1, \quad (6.27)$$

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t.$$

Differentialgleichung: (Tschebyscheffsche Differentialgleichung)

$$(1 - t^2) y'' - t y' - n^2 y = 0, \quad n \geq 0. \quad (6.28)$$

Viele weitere Beispiele (auch für unbeschränkte Intervalle) findet man im Handbuch mathematischer Funktionen von Abramowitz und Stegun.

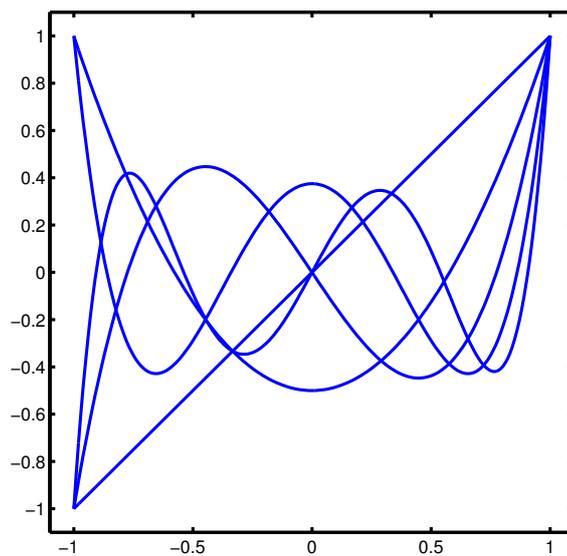


Abb. 6.2 Legendre Polynome P_n , $n = 1, \dots, 5$.

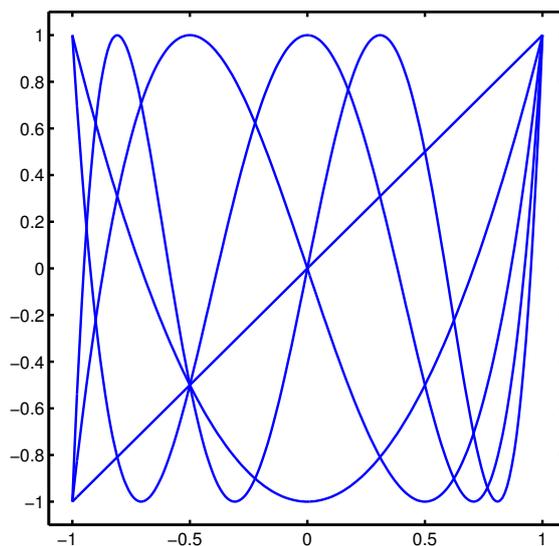


Abb. 6.3 Tschebyscheff Polynome T_n , $n = 1, \dots, 5$.

Mit $c := (c_0, \dots, c_n)^T$ gilt nun

$$f_n = p^T c = (A^{-1}r)^T c = r^T A^{-T} c = r^T z = z_0,$$

wobei $z := A^{-T}c$ oder $A^T z = c$. Dieses lineare Gleichungssystem lautet explizit

$$\begin{bmatrix} 1 & -(t-a_1) & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -(t-a_{n-1}) & b_n \\ & & & & 1 & -(t-a_n) \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Die Rückwärtsstitution für dieses lineare Gleichungssystem ergibt die Rekursion aus der Behauptung des Satzes. \square

Tschebyscheff – Entwicklung.

Wie im letzten Teilabschnitt sei $R := C[a, b]$ und $\omega :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und positive Gewichtsfunktion, für die das Integral $\int_a^b \omega(t) f(t) dt$ für alle $f \in C[a, b]$ existiert. Wieder sei mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Skalarprodukt (6.17) bezeichnet und $\|\cdot\|$ sei die zugehörige Norm. Sind (p_n) die gemäß Satz (6.19) (eindeutig bestimmten) Orthogonalpolynome, so werde mit $q_n := p_n / \|p_n\|$ das zugehörige *Orthonormalsystem* bezeichnet. Wir haben dann $q_n \in \Pi_n \setminus \Pi_{n-1}$ und $\|q_n\| = 1$.

Zu $f \in R$ ist damit gemäß Satz (6.6) die Bestapproximation aus Π_n (bzgl. $\|\cdot\|$) gegeben durch die Fourier-Entwicklung

$$R_n(f) := \sum_{k=0}^n c_k q_k, \quad c_k := \langle f, q_k \rangle. \quad (6.31)$$

Man beachte, dass die Fourier-Koeffizienten c_k unabhängig von n sind.

Zu $f \in R$ lässt sich damit die folgende *formale Orthogonalentwicklung* definieren

$$f \sim \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, q_k \rangle q_k. \quad (6.32)$$

Wir fragen nun nach der Konvergenz der rechten Seite in (6.32) und nach hinreichenden Bedingungen, unter denen in (6.32) Gleichheit gilt.

Satz (6.33)

Zu $f \in C[a, b]$ bezeichne $T_n(f)$ die (bzw. eine) Bestapproximation von f aus Π_n bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ und $R_n(f)$ die Bestapproximation von f bezüglich $\|\cdot\|$. Dann gelten

- a) $\|f - T_n(f)\|_\infty \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$
- b) $\|f - T_n(f)\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$
- c) $\|f - R_n(f)\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$

Man beachte, dass i. Allg. *nicht* $\|f - R_n(f)\|_\infty \rightarrow 0$ folgt.

Beweis:

zu a): Weierstraßscher Approximationssatz.

zu b):

$$\begin{aligned} \|f - T_n(f)\|^2 &= \int_a^b (f(t) - T_n(f)(t))^2 \omega(t) dt \\ &\leq \|f - T_n(f)\|_\infty^2 \int_a^b \omega(t) dt \\ \Rightarrow \|f - T_n(f)\| &\leq \sqrt{\int_a^b \omega(t) dt} \|f - T_n(f)\|_\infty. \end{aligned}$$

zu c): $\|f - R_n(f)\| \leq \|f - T_n(f)\|.$ □

Satz (6.34)

Die *Tschebyscheff-Entwicklung* einer Funktion $f \in C[-1, 1]$ ist gegeben durch

$$R_n(f)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k T_k(x), \quad a_k := \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Ist $f \in C^2[-1, 1]$, so konvergiert $R_n(f)$ gleichmäßig und absolut auf $[-1, 1]$ gegen f .

Beweis: Mit $x = \cos \theta$, $\tilde{f}(\theta) := f(\cos \theta)$ gilt $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tilde{f}(\theta) \cos(k\theta) d\theta.$

Für $k > 0$ liefert die zweimalige partielle Integration

$$a_k = -\frac{2}{\pi k^2} \int_0^\pi \tilde{f}''(\theta) \cos(k\theta) d\theta,$$

wobei die ausintegrierten Bestandteile verschwinden. Damit gilt die Abschätzung

$|a_k| \leq M/k^2$ und somit nach dem Majorantenkriterium die gleichmäßige und absolute Konvergenz von $R_n(f)$.

Die Grenzfunktion $F := \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(f)$ ist somit (als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen) stetig und es folgt

$$\|f - F\| \leq \|f - R_n(f)\| + \|R_n(f) - F\|.$$

Der erste Summand konvergiert nach (6.33) gegen Null, der zweite aufgrund der Definition von F . Somit ist also $F = f$. \square

Bemerkung (6.35)

An obigem Beweis erkennt man, dass die T-Entwicklung einer Funktion $f \in C[-1, 1]$ direkt mit der Fourier-Entwicklung einer 2π -periodischen, geraden Funktion zusammenhängt, genauer

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\theta) &= f(\cos \theta) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta), \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta) \cos(k\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(\theta) \cos(k\theta) d\theta \end{aligned}$$

Die Rücktransformation auf x liefert gerade die T-Entwicklung der Funktion f .

Aussagen über Konvergenz bzw. Konvergenzgeschwindigkeit lassen sich also aus den entsprechenden Aussagen über Fourier-Reihen ableiten.

Im Vorgriff auf spätere Untersuchungen sei der Satz von Dini und Lipschitz zitiert. Er ist benannt nach Ulisse Dini (1845 - 1918) und Rudolf Lipschitz (1832 - 1903).

Satz (6.36) (Dini, Lipschitz)

Erfüllt $f \in C[-1, 1]$ die *Dini-Lipschitz-Bedingung*

$$\lim_{\delta \downarrow 0} [\omega_f(\delta) \ln \delta] = 0,$$

so gilt $\|f - R_n(f)\|_{\infty} \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$).

Dabei bezeichnet $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta\}$ den *Stetigkeitsmodul* von f .

Bemerkung (6.37)

In Verallgemeinerung der Aussage von Satz (6.36) lässt sich in Bezug auf die Konvergenzgeschwindigkeit der Tschebyscheff-Entwicklung zeigen:

Für $f \in C^m[-1, 1]$, $m \geq 2$, gilt die folgende Abschätzung der Tschebyscheff-Koeffizienten

$$|a_k| \leq M_m/k^m, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere konvergieren damit die T-Entwicklungen analytischer Funktionen sehr schnell!

Satz (6.38)

Für die Operatornorm $\|R_n\|_\infty$ der Tschebyscheff Approximation

$$R_n(f)(x) := \sum'_{k=0}^n a_k T_k(x), \quad a_k := \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad f \in C[-1, 1],$$

gelten die folgenden Darstellungen

$$\|R_n\|_\infty = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left| \frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{\sin(\theta/2)} \right| d\theta = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

(Das Summensymbol \sum' bedeutet, dass des erste Summand mit Faktor 1/2 genommen wird.)

Beweisskizze:

Mit der Substitution $x = \cos t$ wird

$$\begin{aligned} R_n(f)(\cos t) &= \frac{2}{\pi} \sum'_{k=0}^n \left[\int_0^\pi f(\cos(\theta)) \cos(k\theta) d\theta \right] \cos(kt) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\cos(\theta)) \sum'_{k=0}^n \cos(kt) \cos(k\theta) d\theta \end{aligned}$$

und damit (analog zu früheren Überlegungen)

$$\begin{aligned} \|R_n\|_\infty &= \max_{t \in [0, \pi]} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum'_{k=0}^n \cos(k\theta) \cos(kt) \right| d\theta \\ &= \max_{t \in [0, \pi]} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \left| \sum'_{k=0}^n \frac{1}{2} (\cos(k(t+\theta)) + \cos(k(t-\theta))) \right| d\theta \\ &\leq \max_{t \in [0, \pi]} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi \left| \sum'_{k=0}^n \cos(k(t+\theta)) \right| + \left| \sum'_{k=0}^n \cos(k(t-\theta)) \right| d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi \left| \sum'_{k=0}^n \cos(k\theta) \right| d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left| \sum'_{k=0}^n \cos(k\theta) \right| d\theta. \end{aligned}$$

Da der letzte Term gerade mit der ersten Summe für $t = 0$ übereinstimmt, gilt in der obigen Relation durchgehend Gleichheit.

Die erste Darstellung in der Behauptung ergibt sich dann aus

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{k=0}^n \cos(k\theta) &= 1 + 2 \cos(\theta) + \dots + 2 \cos(n\theta) \\
 &= \sum_{k=-n}^n e^{ik\theta} \\
 &= \begin{cases} 2n + 1 & : \theta \in 2\pi\mathbb{Z}, \\ \frac{\sin[(n + 1/2)\theta]}{\sin(\theta/2)} & : \text{sonst.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Die zweite Darstellung in der Behauptung erhält man aus der expliziten Aufspaltung des Integrals zwischen den Nullstellen des Integranden $\theta_k = k\pi/(n + 1/2)$, $k = 0, \dots, n$. Die technischen Details hierzu findet man im Buch von Powell. \square

Die zweite Darstellung der Operatornorm $\|R_n\|_\infty$ ermöglicht nun deren explizite Berechnung. In der folgenden Tabelle sind einige Werte angegeben.

n	$\ R_n\ _\infty$	n	$\ R_n\ _\infty$
2	0.16422e + 01	12	0.22940e + 01
4	0.18801e + 01	14	0.23542e + 01
6	0.20290e + 01	16	0.24065e + 01
8	0.21377e + 01	18	0.24529e + 01
10	0.22234e + 01	20	0.24945e + 01

Die Werte der Operatornorm $\|R_n\|_\infty$ liegen somit in der gleichen Größenordnung wie die des Operators für die Polynom-Interpolation zu Tschebyscheff-Knoten; vgl. Abschnitt 3.

Es ist allerdings zu beachten, dass die Operatornorm die Approximationsgüte für (nur) stetige Funktionen $f \in C[-1, 1]$ widerspiegelt. Für glattere Funktionen f liefert die T-Approximation dagegen i.Allg. erheblich bessere Approximationen!