

## 5. Splinefunktionen

### Interpolation mit Splines.

Die im dritten Kapitel geschilderten Schwierigkeiten bei der Interpolation mit Polynomen höheren Grades bzgl. der Approximationsgüte lassen sich dadurch überwinden, dass man auf *stückweise definierte Polynome* als approximierende Funktionen ausweicht.

Schränken wir uns zunächst auf den häufig auftretenden Fall der stückweise *kubischen* Polynome ein, so ergibt sich die folgende Problemstellung:

Gegeben seien Interpolationsknoten in einem Intervall  $[a, b]$ :

$$\Delta : \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b, \quad (5.1)$$

sowie Daten  $f_j = f(t_j)$ ,  $j = 0, \dots, n$  einer vorgegebenen Funktion  $f \in C[a, b]$ . Gesucht ist eine (stetige) Funktion  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit den Eigenschaften

$$(a) \quad s|_{[t_j, t_{j+1}]} \in \Pi_3, \quad (b) \quad s(t_j) = f_j, j = 0, \dots, n. \quad (5.2)$$

Setzt man das kubische Polynom im  $j$ -ten Teilintervall  $[t_j, t_{j+1}]$  mit

$$s(t) = p_j(t) = a_j + b_j(t - t_j) + c_j(t - t_j)^2 + d_j(t - t_j)^3 \quad (5.3)$$

an, so erkennt man, dass zur Festlegung der Koeffizienten pro Teilintervall zwei Informationen fehlen.

Zur Festlegung könnte man zusätzlich Ableitungen  $f'_j$  vorschreiben, also neben (5.2) fordern

$$p'_j(t_j) = f'_j, \quad p'_j(t_{j+1}) = f'_{j+1}, \quad j = 0, \dots, n - 1. \quad (5.4)$$

Man beachte, dass die Daten  $f'_j$  willkürlich vorgegeben werden, zumal nur  $f \in C[a, b]$  vorausgesetzt war. Zugleich schränkt man die approximierenden Funktionen damit auf  $C^1$ -Funktionen ein.

Mittels einfacher Rechnung ergeben sich hieraus die eindeutig bestimmten Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_j &= f_j, \\ b_j &= f'_j, \\ c_j &= \frac{3f[t_j, t_{j+1}] - 2f'_j - f'_{j+1}}{t_{j+1} - t_j}, \\ d_j &= \frac{f'_j + f'_{j+1} - 2f[t_j, t_{j+1}]}{(t_{j+1} - t_j)^2}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Splinefunktion lässt sich nun leicht mittels (5.5) und (5.3) (per Intervallabfrage und Anwendung des Horner-Schemas) auswerten.

Es gibt verschiedene Wege, geeignete Ableitungswerte  $f'_j$  vorzuschreiben.

**A. Kubische Hermite-Interpolation.** Hierbei sind die Daten  $f'_j$  vom Problem her vorgeschrieben,  $f$  ist also eine  $C^1$ -Funktion.

**B. Kubische Bessel-Interpolation.** Man bestimmt  $f'_j$  als Ableitung einer interpolierenden Parabel zu drei benachbarten Knoten:

$$\begin{aligned} &\text{für } j = 1, \dots, n-1 : \\ &\quad p_j \in \Pi_2 \text{ interpoliere } (t_i, f_i), \quad i = j-1, j, j+1; \\ &\quad f'_j := p'_j(t_j); \\ &\text{für } j = 0 : \quad f'_0 := p'_1(t_0); \\ &\text{für } j = n : \quad f'_n := p'_{n-1}(t_n). \end{aligned}$$

**C. Kubische Spline-Interpolation.** Man bestimme die  $f'_j$  so, dass  $s$  sogar eine  $C^2$ -Funktion wird, also  $p''_{j-1}(t_j) = p''_j(t_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n-1$ , gilt. Offenbar fehlen dann aber noch zwei zusätzliche Bedingungen.

Aus (5.3) und (5.5) erhält man damit das folgende lineare Gleichungssystem ( $j = 1, 2, \dots, n-1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_{j-1}} f'_{j-1} + 2 \left( \frac{1}{h_{j-1}} + \frac{1}{h_j} \right) f'_j + \frac{1}{h_j} f'_{j+1} &= r_j, \\ r_j &:= 3 \left( \frac{f[t_{j-1}, t_j]}{h_{j-1}} + \frac{f[t_j, t_{j+1}]}{h_j} \right), \end{aligned} \tag{5.6}$$

wobei  $h_j := t_{j+1} - t_j$ ,  $j = 0, \dots, n-1$ . In Matrix-Schreibweise lautet das Gleichungssystem (5.6)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{h_0} & 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{1}{h_{n-2}} & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) & \frac{1}{h_{n-1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ f'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{5.7}$$

Schreibt man nun  $f'_0$  und  $f'_n$  geeignet vor, so kann man diese Ausdrücke auf die rechte Seite bringen und man erhält aus (5.7) ein lineares Gleichungssystem mit einer quadratischen  $(n-1, n-1)$  Koeffizientenmatrix, die *tridiagonal*, *symmetrisch* und *strikt diagonaldominant* ist, somit auch insbesondere regulär. Das lineare Gleichungssystem besitzt daher eine eindeutig bestimmte Lösung und diese lässt sich numerisch stabil und effizient mittels *Cholesky-Zerlegung* der Koeffizientenmatrix lösen.

**Anmerkung zur Cholesky-Zerlegung:** Bei vorgegebenen Ableitungen  $f'_0, f'_n$  erhält man aus (5.7) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 2\left(\frac{1}{h_0} + \frac{1}{h_1}\right) & \frac{1}{h_1} & & & \\ & \frac{1}{h_1} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \frac{1}{h_{n-2}} & \\ & & & & 2\left(\frac{1}{h_{n-2}} + \frac{1}{h_{n-1}}\right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} f'_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f'_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 - f'_0/h_0 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{n-2} \\ r_{n-1} - f'_n/h_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Für die Dreieckszerlegung der Koeffizientenmatrix verwendet man nun den Ansatz

$$\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & 0 \\ c_1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & c_{n-2} \\ 0 & & c_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ u_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & u_{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 & c_1 & & 0 \\ & v_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-2} \\ 0 & & & v_{n-1} \end{pmatrix},$$

so dass sich die  $u_i, v_i$  mit dem folgenden **Algorithmus** berechnen lassen

$$\begin{aligned} v_1 &:= 2(1/h_0 + 1/h_1); \\ \text{für } j &= 2, 3, \dots, n-1 \\ u_j &:= 1/(h_{j-1} v_{j-1}), \\ v_j &:= 2(1/h_{j-1} + 1/h_j) - u_j/h_{j-1}; \end{aligned}$$

Im Anschluss ist die **Vorwärts- / Rückwärtssubstitution** durchzuführen

$$\begin{aligned} z_1 &:= r_1 - f'_0/h_0; \\ \text{für } j &= 2, 3, \dots, n-2 \\ z_j &:= r_j - u_j z_{j-1}; \\ z_{n-1} &:= (r_{n-1} - f'_n/h_{n-1}) - u_{n-1} z_{n-2}; \\ f'_{n-1} &:= z_{n-1}/v_{n-1}; \\ \text{für } j &= n-2, n-3, \dots, 1 \\ f'_j &:= (z_j - f'_{j+1}/h_j)/v_j; \end{aligned}$$

Bei vorgegebenen Randableitungen  $f'_0 = f'(t_0), f'_n = f'(t_n)$  ist also die *interpolierende kubische Splinefunktion* eindeutig bestimmt und werde mit  $s_f$  bezeichnet.

### Andere Randvorgaben (5.8)

- (i) *Natürliche Randbedingungen:*  $s''(t_0) = s''(t_n) = 0$ .
- (ii) *Periodische Randbedingungen:* Ist  $f$  eine periodische Funktion, gilt also  $f(t_0) = f(t_n)$ , so fordert man zusätzlich  $s'(t_0) = s'(t_n)$  und  $s''(t_0) = s''(t_n)$ .

**Definition (5.9)**

Der lineare Raum der *kubischen Splinefunktionen* zum Gitter  $\Delta = \{t_0 < \dots < t_n\}$  werde definiert durch

$$S_3(\Delta) := \{s : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R} : s \in C^2[t_0, t_n], s|_{[t_j, t_{j+1}]} \in \Pi_3(\forall j)\}$$

**Satz (5.10) (Extremal- und Approximationseigenschaften)**

Sei  $f \in C^2[a, b]$  und bezeichne

$$\text{Int}[f] := \{g \in C^2[a, b] : g(t_j) = f_j, j = 0, \dots, n, g'(t_i) = f'(t_i), i = 0, n\}$$

die Menge der (die Daten der Funktion  $f$ ) interpolierenden  $C^2$ -Funktionen. Dann gelten für den interpolierenden kubischen Spline  $s_f \in \text{Int}[f] \cap S_3(\Delta)$  die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad \forall g \in \text{Int}[f] : \int_a^b (s_f''(t))^2 dt &\leq \int_a^b (g''(t))^2 dt, \\ \text{b)} \quad \forall s \in S_3(\Delta) : \int_a^b (f''(t) - s''(t))^2 dt &\leq \int_a^b (f''(t) - s_f''(t))^2 dt. \end{aligned}$$

**Interpretation:**

Unter allen interpolierenden  $C^2$ -Funktionen minimiert der kubische Spline das so genannte **Holladay-Funktional**  $I(g) := \int_a^b (g''(t))^2 dt$ . Dieses kann gedeutet werden als eine Approximation der Krümmung von  $s_f$ .

Unter allen Splinefunktionen auf dem Gitter  $\Delta$  ist  $s_f$  diejenige, für die  $s_f''$  die zweite Ableitung  $f''$  am Besten approximiert (im  $L_2$ -Sinn).

**Beweis:** Zunächst zeigen wir die folgende Orthogonalitätsrelation

$$\forall s \in S_3(\Delta), g \in \text{Int}[f] : \int_a^b s''(t) (g''(t) - s_f''(t)) dt = 0. \quad (5.11)$$

Mittels zweimaliger partieller Integration lässt sich das Integral nämlich umformen zu

$$\int_a^b s''(g'' - s_f'') = \sum_{j=0}^{n-1} \{s''(g' - s_f')|_{t_j}^{t_{j+1}} - s'''(g - s_f)|_{t_j}^{t_{j+1}} + \int_{t_j}^{t_{j+1}} s^{(4)}(g - s_f)\}$$

Der erste Summand verschwindet wegen der Stetigkeit von  $s''(g' - s_f')$  und wegen  $g' = s_f' = f'$  in  $t = a, b$ .

Der zweite Summand verschwindet wegen  $g = s_f = f$  in  $t = t_j, j = 0, \dots, n$ .

Der dritte Summand verschwindet schließlich wegen  $s^{(4)} = 0$ .

Damit ist die Orthogonalitätsrelation (5.11) gezeigt. Wir kommen zum eigentlichen Beweis:

$$\begin{aligned} \text{zu a):} \quad \int_a^b (g'' - s_f'')^2 &= \int_a^b (g'')^2 - \int_a^b (s_f'')^2 - 2 \int_a^b s_f'' (g'' - s_f'') \\ &\stackrel{(5.12)}{=} \int_a^b (g'')^2 - \int_a^b (s_f'')^2 \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{zu b):} \quad \int_a^b (f'' - s'')^2 &= \int_a^b (f'' - s_f'' + s_f'' - s'')^2 \\ &= \int_a^b (f'' - s_f'')^2 + \int_a^b (s_f'' - s'')^2 \\ &\quad + 2 \int_a^b (f'' - s_f'') s_f'' - 2 \int_a^b (f'' - s_f'') s'' \\ &\stackrel{(5.11)}{=} \int_a^b (f'' - s_f'')^2 + \int_a^b (s_f'' - s'')^2 \\ &\geq \int_a^b (f'' - s_f'')^2. \end{aligned} \quad \square$$

### Beispiel (5.12)

Für das Runge'sche Beispiel, vgl. (3.10) und (3.17), ist in Abbildung 5.1 die kubische Spline-Interpolierende für  $n = 6$ , äquidistante Knoten und natürliche Randbedingungen aufgezeichnet.

Abbildung 5.2 zeigt die Fehlerfunktion für das gleiche Beispiel mit  $n = 20$ . Man vergleiche auch die Abbildungen 3.3 und 3.4.

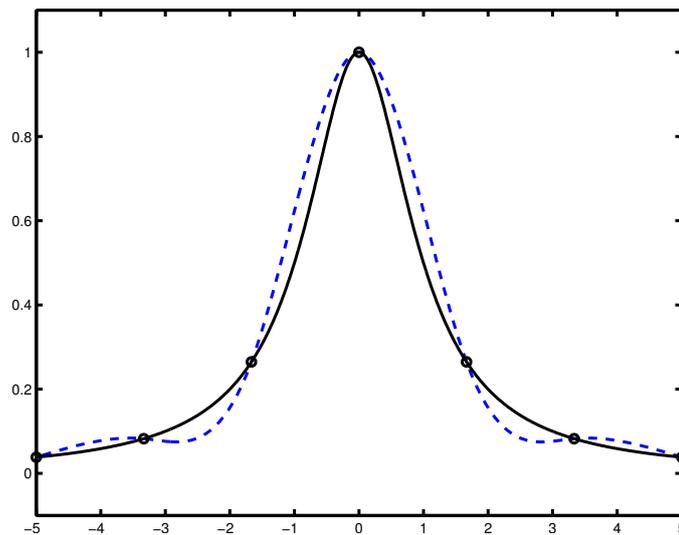


Abb. 5.1 Beispiel von Runge, natürlicher kubischer Spline,  $n = 6$ .

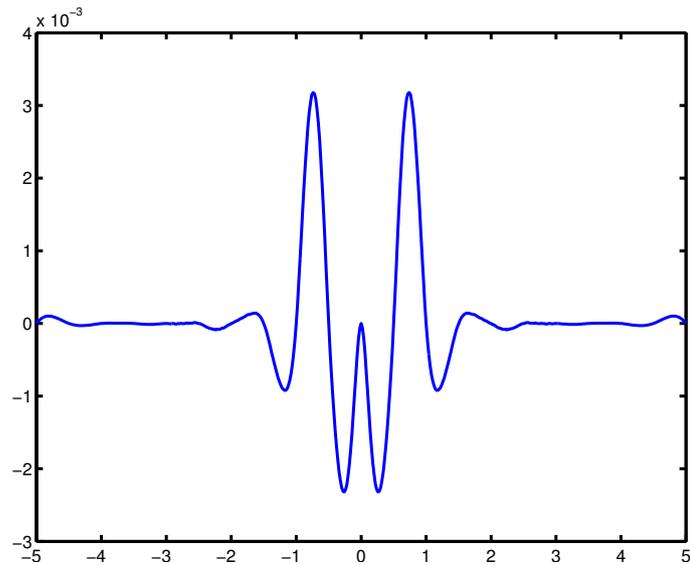


Abb. 5.2 Beispiel von Runge, natürlicher kubischer Spline,  $n = 20$ .

**Definition (5.13)**

In Verallgemeinerung von (5.9) definieren wir für  $m \in \mathbb{N}_0$  und Knoten  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  den linearen Raum der *Splinefunktionen vom Grad  $m$*  und zum Gitter  $\Delta = \{t_0 < \dots < t_n\}$  durch

$$S_m(\Delta) := \{s : [t_0, t_n] \rightarrow \mathbb{R} : s \in C^{m-1}[t_0, t_n], s|_{[t_j, t_{j+1}[} \in \Pi_m(\forall j), s|_{[t_{n-1}, t_n]} \in \Pi_m\}$$

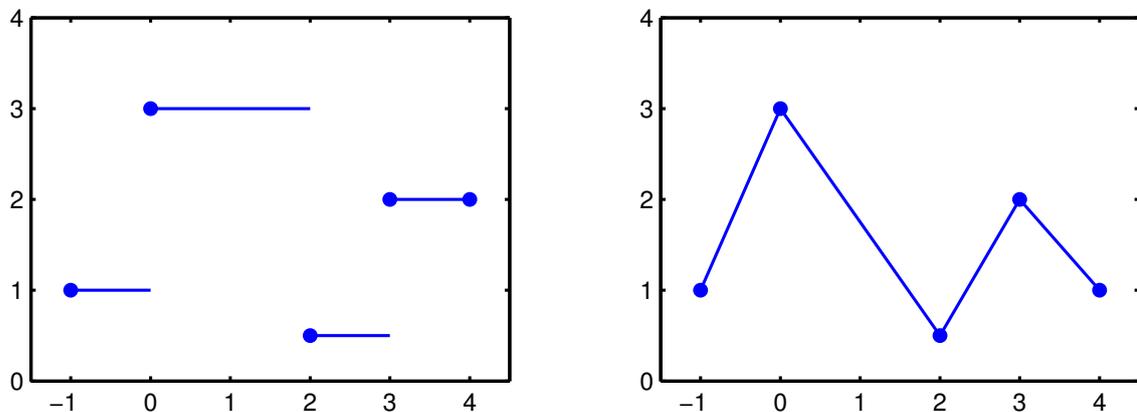


Abb. 5.3 Spline vom Grad  $m = 0$  (Treppenfunktion) und  $m = 1$  (Polygonzug).

**Satz (5.14)**

$S_m(\Delta)$  ist ein linearer Teilraum des Vektorraums  $\mathbb{R}^{[t_0, t_n]}$  der Dimension  $\dim S_m(t_0, \dots, t_n) = m + n$ .

**Beweis:** Dass  $S_m(\Delta)$  ein reeller Vektorraum ist, ist unmittelbar klar. Zur Dimensionsbestimmung verwenden wir eine Basisdarstellung der Splines  $s \in S_m(\Delta)$ . Nach

Definition hat man eine eindeutige Darstellung  $s(t) = p_j(t)$ ,  $p_j \in \Pi_m$ , auf dem Intervall  $[t_j, t_{j+1}[$ . Daher gilt

$$(i) \quad p_0 \in \text{Spann}\{1, (t - t_0), \dots, (t - t_0)^m\}$$

Ferner ist  $s \in S_m$  nach Definition eine  $C^{m-1}$ -Funktion. Daher muss  $p_{j+1} - p_j$  in  $t_{j+1}$  eine  $m$ -fache Nullstelle besitzen. Es gilt somit

$$(ii) \quad p_{j+1}(t) - p_j(t) = \beta_{j+1} (t - t_{j+1})^m, \quad t_{j+1} \leq t \leq t_n,$$

wobei  $\beta_{j+1}$  eindeutig bestimmt ist. Setzt man also

$$(t - t_j)_+ := \begin{cases} 0, & \text{für } t < t_j, \\ (t - t_j), & \text{für } t \geq t_j, \end{cases} \quad (5.15)$$

so erhält man die Spline-Darstellung

$$s(t) = \sum_{i=0}^m \alpha_i (t - t_0)^i + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j (t - t_j)_+^m \quad (5.16)$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten  $\alpha_j, \beta_j$ . Insbesondere ist (5.16) eine Basisdarstellung für  $S_m(\Delta)$ .  $\square$

## B-Splines.

Die obige Basis-Darstellung (5.16) ist für die numerische Auswertung wenig geeignet. Zum Einen ist sie anfällig gegenüber Auslöschung (also Verlust an Genauigkeit) zum Anderen ist sie nicht *lokal*, d.h. lokale Störungen in  $s$  (z.B. Messungenauigkeit der zu interpolierenden Funktionswerte an einer bestimmten Stelle) wirken sich im Allg. auf *alle* Koeffizienten in der Darstellung (5.16) aus.

Gesucht ist dagegen eine Basisdarstellung, deren Basis-Splines (*B-Splines*) einen möglichst kleinen (kompakten) Träger besitzen. Eine solche *B-Spline-Darstellung* hat die Form

$$s(t) = \sum_{j=-m}^{n-1} \alpha_j B_{mj}(t), \quad (5.17)$$

wobei man mit einem beidseitig *erweiterten Gitter*

$$t_{-m} < t_{-m+1} < \dots < t_0 < \dots < t_n < \dots < t_{n+m} \quad (5.18)$$

arbeitet ( $m$  beliebige zusätzliche Knoten jeweils links von  $t_0$  und rechts von  $t_n$ ) und  $B_{mj} \in S_m(t_{-m}, \dots, t_{n+m})$  ein Spline vom Grad  $m$  mit Träger  $[t_j, t_{j+m+1}]$  bezeichnet.

Für  $m = 3$  hat man beispielsweise die B-Splines  $B_{3,-3}, B_{3,-2}, \dots, B_{3,n-1}$ , wobei  $B_{3,j}$  den Träger  $[t_j, t_{j+4}]$  besitzt.

Die Vorteile der B-Spline-Darstellung (5.17) gegenüber der Darstellung (5.16) liegen auf der Hand:

- Es sind stets nur  $m + 1$  Summanden in (5.17) auszuwerten, nämlich für  $t \in [t_j, t_{j+1}[$  lediglich die Summanden mit den B-Splines  $B_{m,j-m}, \dots, B_{m,j}$ .
- Die Darstellung ist *lokal*, d.h. eine Störung in  $f_j$  beeinflusst höchstens die Koeffizienten  $\alpha_{j-m}, \dots, \alpha_j$ .
- In vielen Anwendungen (z.B. in finiten Element-Programmen) sind Integrale der Form  $\int_{t_0}^{t_n} s(t) f(t) dt$  auszuwerten. Setzt man die Darstellung (5.17) herein ein, so verbleibt die Berechnung der Integrale  $\int B_{m,j} f(t) dt$  über einem jeweils *kleinen* Träger.

### Konstruktion der B-Splines.

Wir suchen einen Spline  $B_{m,j} \in S_m(t_{-m}, \dots, t_{n+m})$  mit den Eigenschaften  $B_{m,j} \neq 0$  und  $B_{m,j}(t) = 0$  für alle  $t \notin [t_j, t_{j+p}]$ , wobei  $p$  möglichst klein sein soll.

Nach (5.16) hat man damit eine Darstellung

$$B_{m,j}(t) = \sum_{i=j}^{j+p} d_i (t - t_i)_+^m, \quad (5.19)$$

wobei wir fordern  $\forall t > t_{j+p} : \sum_{i=j}^{j+p} d_i (t - t_i)^m = 0$ . Multipliziert man dies mittels binomischer Formel aus, so ergibt sich

$$\forall t > t_{j+p} : \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} (-1)^r \left( \sum_{i=j}^{j+p} d_i t_i^r \right) t^{m-r} = 0$$

und damit das folgende homogene lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der  $d_j, \dots, d_{j+p}$ :

$$\forall r = 0, 1, \dots, m : \sum_{i=j}^{j+p} t_i^r d_i = 0. \quad (5.20)$$

Die Koeffizientenmatrix dieses linearen Gleichungssystems hat maximalen Rang ( $= m + 1$ ; die ersten  $m$  Spalten bilden gerade die Vandermonde Matrix zu  $t_j, \dots, t_{j+m}$ ) und ist daher nur für  $p \geq m + 1$  singulär.

Wir wählen  $p$  minimal, also  $p = m + 1$ . Dann hat (5.20) einen eindimensionalen Lösungsraum und wir können noch einen Normalisierungsparameter frei wählen.

Für eine spätere Anwendung halten wir fest:

### Bemerkung (5.21)

Gilt für ein  $p \leq m$  und Koeffizienten  $d_j, \dots, d_{j+p}$

$$\forall t_{j+p} < t < t_{j+p+1} : \sum_{i=j}^{j+p} d_i (t - t_i)_+^m = 0,$$

so verschwinden notwendigerweise alle Koeffizienten  $d_j = \dots = d_{j+p} = 0$ .

Um eine explizite Lösungsdarstellung zu erhalten, verwenden wir die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms und nutzen aus, dass die Monome  $t^r$ ,  $r = 0, \dots, m+1$ , bei den Interpolationsknoten  $t_j, \dots, t_{j+m+1}$  exakt interpoliert werden, also

$$\forall r = 0, \dots, m+1: \quad t^r = \sum_{i=j}^{j+m+1} t_i^r \ell_i(t),$$

wobei  $\ell_i$  die entsprechenden Lagrange-Polynome bezeichnen. Vergleicht man hierin die Koeffizienten von  $t^{m+1}$ , so ergibt sich mit (3.7)

$$\forall r = 0, \dots, m: \quad 0 = \sum_{i=j}^{j+m+1} t_i^r \left( \prod_{\nu=j, \nu \neq i}^{j+m+1} \frac{1}{t_i - t_\nu} \right).$$

Durch Vergleich mit (5.20) und geeigneter Normierung der  $d_i$  (die Normierung ist so, dass  $\sum_{j=-m}^{n-1} B_{m,j} = 1$  ist; vgl. (5.26)) ergibt sich die folgende explizite Darstellung der B-Splines ( $j = -m, \dots, n-1$ )

$$B_{m,j}(t) = (t_{j+m+1} - t_j) \sum_{i=j}^{j+m+1} \left( \prod_{\nu=j, \nu \neq i}^{j+m+1} \frac{1}{t_\nu - t_i} \right) (t - t_i)_+^m. \quad (5.22)$$

**Beispiele:  $m = 0$ :**

$$\begin{aligned} B_{0,j}(t) &= (t_{j+1} - t_j) \left\{ \frac{(t - t_j)_+^0}{t_{j+1} - t_j} + \frac{(t - t_{j+1})_+^0}{t_j - t_{j+1}} \right\} \\ &= (t - t_j)_+^0 - (t - t_{j+1})_+^0 \\ &= \begin{cases} 1, & \text{für } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

**$m = 1$ :**

$$\begin{aligned} B_{1,j}(t) &= (t_{j+2} - t_j) \left\{ \frac{(t - t_j)_+}{(t_{j+1} - t_j)(t_{j+2} - t_j)} + \frac{(t - t_{j+1})_+}{(t_j - t_{j+1})(t_{j+2} - t_{j+1})} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(t - t_{j+2})_+}{(t_j - t_{j+2})(t_{j+1} - t_{j+2})} \right\} \\ &= \begin{cases} \frac{t - t_j}{t_{j+1} - t_j}, & \text{für } t_j \leq t < t_{j+1} \\ \frac{t_{j+2} - t}{t_{j+2} - t_{j+1}}, & \text{für } t_{j+1} \leq t < t_{j+2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Zur numerischen Auswertung ist (5.22) natürlich nur schlecht geeignet. Hier kann man sich zunutze machen, dass die B-Splines  $B_{m,j}$  analog zu den Newtonschen dividierten Differenzen und den Bernstein-Polynomen einer Dreiterm-Rekursion genügen:

**Satz (5.23)**

Die  $B_{m,j}$  genügen der Dreiterm-Rekursion ( $\ell = 1, \dots, m$ ,  $j = -m, \dots, n + m - \ell - 1$ )

$$B_{\ell,j}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+\ell} - t_j} B_{\ell-1,j}(t) + \frac{t_{j+\ell+1} - t}{t_{j+\ell+1} - t_{j+1}} B_{\ell-1,j+1}(t)$$

Start der Rekursion:

$$B_{0,j} := \begin{cases} 1, & \text{falls } t_j \leq t < t_{j+1} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad j = -m, \dots, n + m - 1.$$

**Beweis:** (mittels vollständiger Induktion über  $\ell$ )

Für  $\ell = 1$  rechnet man aus der Rekursion (5.23) unmittelbar die obige explizite Darstellung für  $m = 1$  nach.

Für  $B_{\ell-1,j}(t)$  und  $B_{\ell-1,j+1}(t)$  gelten nach Induktionsvoraussetzung die entsprechenden Darstellungen (5.22). Wir haben zu zeigen, dass diese dann auch für  $B_{\ell,j}$  – berechnet nach (5.23) – gilt. Dazu setzen wir die Darstellungen in die rechte Seite von (5.23) ein und formen um

$$\begin{aligned} B_{\ell,j}(t) &= \frac{t - t_j}{t_{j+\ell} - t_j} B_{\ell-1,j}(t) + \frac{t_{j+\ell+1} - t}{t_{j+\ell+1} - t_{j+1}} B_{\ell-1,j+1}(t) \\ &= (t - t_j) \sum_{i=j}^{j+\ell} \left( \prod_{\nu=j, \nu \neq i}^{j+\ell} \frac{1}{t_\nu - t_i} \right) (t - t_i)_+^{\ell-1} \\ &\quad + (t_{j+\ell+1} - t) \sum_{i=j+1}^{j+\ell+1} \left( \prod_{\nu=j+1, \nu \neq i}^{j+\ell+1} \frac{1}{t_\nu - t_i} \right) (t - t_i)_+^{\ell-1} \\ &= \sum_{i=j}^{j+\ell} (t - t_j) (t_{j+\ell+1} - t_i) \left( \prod_{\nu=j, \nu \neq i}^{j+\ell+1} \frac{1}{t_\nu - t_i} \right) (t - t_i)_+^{\ell-1} \\ &\quad + \sum_{i=j+1}^{j+\ell+1} (t_{j+\ell+1} - t) (t_j - t_i) \left( \prod_{\nu=j, \nu \neq i}^{j+\ell+1} \frac{1}{t_\nu - t_i} \right) (t - t_i)_+^{\ell-1} \\ &= \sum_{i=j}^{j+\ell+1} \{ (t - t_j) (t_{j+\ell+1} - t_i) + (t_{j+\ell+1} - t) (t_j - t_i) \} \left( \prod_{\nu=j, \nu \neq i}^{j+\ell+1} \frac{1}{t_\nu - t_i} \right) (t - t_i)_+^{\ell-1} \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren der geschweiften Klammer findet man

$$\{ \dots \} = (t_{j+\ell+1} - t_j) (t - t_i)$$

und somit genau die Darstellung (5.22) für  $B_{\ell,j}$ . □

Tableau zur Berechnung von  $B_{m,j} : (j = -m, \dots, n-1)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & B_{0,j} \\
 & & & & & & B_{0,j+1} & B_{1,j} \\
 & & & & & & B_{0,j+2} & B_{1,j+1} & \cdots \\
 & & & & & & \vdots & \vdots & \\
 & & & & & & B_{0,j+m} & B_{1,j+m-1} & \cdots & B_{m,j}
 \end{array}$$

**Anmerkung :** Zur numerischen Auswertung von (5.23) genügt es, ein *eindimensionales* Array zu verwenden, etwa  $B_0, \dots, B_m$ , und das Tableau wie folgt zu speichern:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & B_0 \\
 & & & & & & B_1 & B_0 \\
 & & & & & & B_2 & B_1 & \cdots \\
 & & & & & & \vdots & \vdots & \\
 & & & & & & B_m & B_{m-1} & \cdots & B_0
 \end{array}$$

Es ergibt sich dann der folgende Algorithmus zur Berechnung von  $B_{m,j}(t)$ .

**Algorithmus (5.24):**

Für  $k = 0, 1, \dots, m$ :

$$B_k := \begin{cases} 1, & \text{falls } t_{j+k} \leq t < t_{j+k+1}, \quad (\leq \text{ bei } k = m) \\ 0, & \text{sonst;} \end{cases}$$

Für  $\ell = k-1, k-2, \dots, 0$ :

$$B_\ell := \frac{t - t_{j+\ell}}{t_{j+k} - t_{j+\ell}} B_\ell + \frac{t_{j+k+1} - t}{t_{j+k+1} - t_{j+\ell+1}} B_{\ell+1};$$

$$B_{m,j}(t) = B_0.$$

**Satz (5.25) :** Es gilt:

$$B_{m,j}(t) \begin{cases} > 0 & \text{für } t_j < t < t_{j+m+1}, \\ = 0 & \text{für } t \leq t_j, \quad t \geq t_{j+1+m}. \end{cases}$$

**Beweis:** Man sieht dies unmittelbar mittels der Rekursion (5.23) per vollständiger Induktion. □

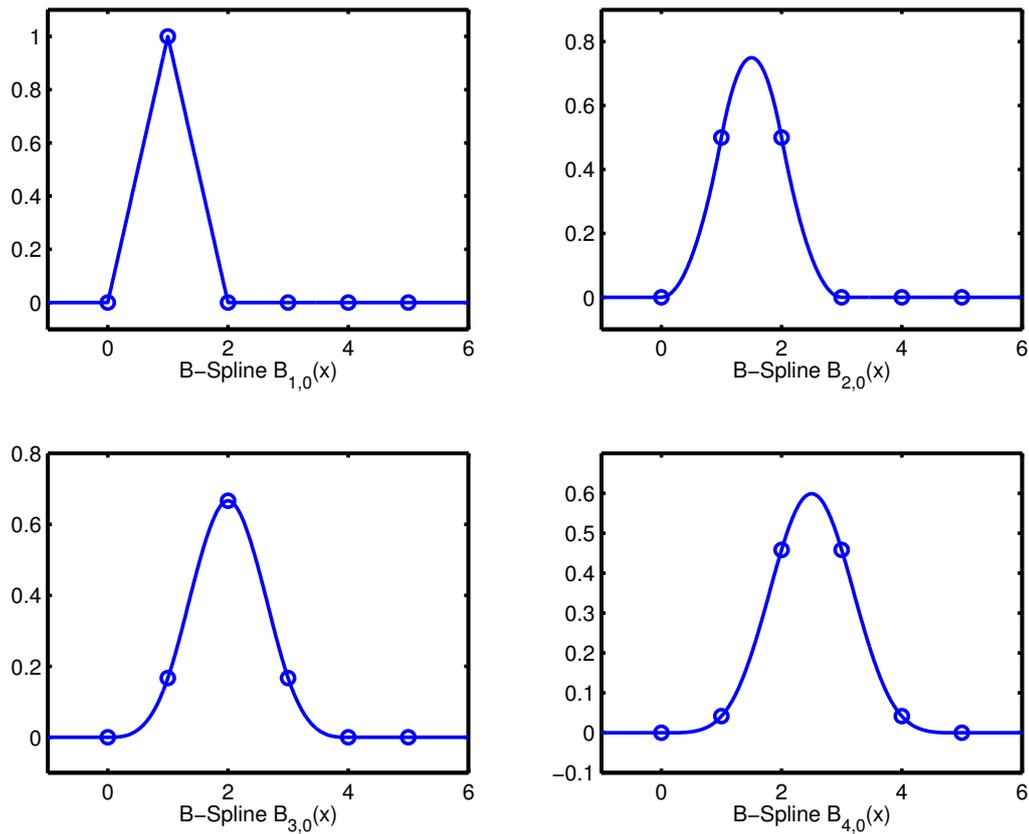


Abb. 5.4 B-Splines  $B_{m,0}$ ,  $m = 1, 2, 3, 4$ .

**Satz (5.26) :**

Auf dem Intervall  $[t_0, t_n]$  bilden die B-Splines  $B_{m,j}$ ,  $j = -m, \dots, n-1$  eine Zerlegung der Eins:

$$\forall t \in [t_0, t_n] : \sum_{j=-m}^{n-1} B_{m,j}(t) = 1.$$

**Beweis:** (per vollst. Induktion über  $m$ )

**$m = 0$  :** Klar nach Definition der  $B_{0,j}$ .

**$m - 1 \Rightarrow m$  :** Summation mittels (5.23) liefert

$$\begin{aligned} \sum_{j=-m}^{n-1} B_{m,j}(t) &= \sum_{j=-m}^{n-1} \left\{ \frac{t-t_j}{t_{j+m}-t_j} B_{m-1,j}(t) + \frac{t_{j+m+1}-t}{t_{j+m+1}-t_{j+1}} B_{m-1,j+1}(t) \right\} \\ &= \sum_{j=-m}^{n-1} \frac{t-t_j}{t_{j+m}-t_j} B_{m-1,j}(t) + \sum_{j=-m+1}^n \frac{t_{j+m}-t}{t_{j+m}-t_j} B_{m-1,j}(t) \\ &= \frac{t-t_{-m}}{t_0-t_{-m}} B_{m-1,-m}(t) + \sum_{j=-m+1}^{n-1} B_{m-1,j}(t) + \frac{t_{n+m}-t}{t_{n+m}-t_n} B_{m-1,n}(t) \\ &= 1, \end{aligned}$$

da die Splines  $B_{m-1,-m}$  und  $B_{m-1,n}$  auf  $[t_0, t_n]$  verschwinden und aufgrund der Induktionsannahme.  $\square$

**Satz (5.27) :**

Die B-Splines  $B_{m,j}$ ,  $j = -m, \dots, n-1$  bilden eine Basis von  $S_m(t_0, \dots, t_n)$ .

**Beweis:** Wegen  $\dim S_m(t_0, \dots, t_n) = m+n$  genügt es zu zeigen, dass die B-Splines  $B_{m,j}$ ,  $j = -m, \dots, n-1$ , linear unabhängig sind. Gelte also mit  $\alpha_j \in \mathbb{R}$ :

$$\forall t \in [t_0, t_n]: \quad s(t) := \sum_{j=-m}^{n-1} \alpha_j B_{m,j}(t) = 0. \quad (1)$$

Wir haben zu zeigen, dass alle  $\alpha_j$  verschwinden. Setzt man in die obige Gleichung die  $B_{m,j}$  gemäß (5.22) ein, so erhält man nach Umsortierung der Summe eine Darstellung der Form

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{j=-m}^{n-1} \alpha_j \sum_{i=j}^{j+m+1} c_{i,j} (t-t_i)_+^m = \sum_{j=-m}^{n-1} \alpha_j \sum_{i=-m}^{n+m} c_{i,j} (t-t_i)_+^m \\ &= \sum_{i=-m}^{n+m} \left( \sum_{j=-m}^{n-1} \alpha_j c_{i,j} \right) (t-t_i)_+^m =: \sum_{i=-m}^{n+m} d_i (t-t_i)_+^m. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen  $c_{i,j}$  die (nicht verschwindenden) Koeffizienten aus (5.22). Genauer gilt  $c_{i,j} \neq 0$  für  $j \leq i \leq j+m+1$  und es wird gesetzt  $c_{i,j} := 0$  für alle  $i < j$  und für alle  $i > j+m+1$ .

Betrachtet man nun die Teilsumme  $\tilde{s}(t) := \sum_{i=-m}^0 d_i (t-t_i)_+^m$ , so gilt nach Voraussetzung  $\forall t \in [t_0, t_1]: \tilde{s}(t) = 0$ .

Aufgrund der Bemerkung (5.21) über den minimalen Träger eines Splines folgt hieraus aber  $d_j = 0$ ,  $j = -m, \dots, 0$ . Damit ergibt sich rekursiv

$$\begin{aligned} j = -m: \quad d_{-m} &= \sum_{j=-m}^{n-1} \alpha_j c_{-m,j} = \alpha_{-m} c_{-m,-m} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_{-m} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = -m+1: \quad d_{-m+1} &= \sum_{j=-m+1}^{n-1} \alpha_j c_{-m+1,j} = \alpha_{-m+1} c_{-m+1,-m+1} = 0 \\ &\Rightarrow \alpha_{-m+1} = 0, \end{aligned}$$

u.s.w. Insgesamt folgt daraus  $\forall -m \leq j \leq 0: \alpha_j = 0$ . Es bleibt somit nach (1):

$$\forall t \in [t_0, t_n]: \quad s(t) := \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j B_{m,j}(t) = 0.$$

Mit (5.25) sieht man aber unmittelbar, dass diese Relation nur für  $\alpha_j = 0$ ,  $1 \leq j \leq n - 1$  gelten kann.  $\square$

### Anmerkungen (5.28)

a) Die B-Splines  $B_{m,j}$  sind  $C^{m-1}$ -Funktionen auf  $\mathbb{R}$ . Man kann die zusätzlichen Knoten  $t_{-m}, \dots, t_{-1}$  und  $t_{n+1}, \dots, t_{n+m}$  im Sinn eines Grenzwertes als Mehrfachknoten in  $t_0$  bzw.  $t_n$  wählen. Hierdurch reduziert sich die Differenzierbarkeitsordnung in  $t_0$  und  $t_n$ . Die  $B_{m,j}$  lassen sich auch in diesem Fall, also bei der Knotenwahl

$$t_{-m} = \dots = t_0 < \dots < t_n = t_{n+1} = \dots = t_{n+m}, \quad (5.29)$$

mit Hilfe der Dreiterm-Rekursion (5.23)

$$B_{\ell,j}(t) = \frac{t - t_j}{t_{j+\ell} - t_j} B_{\ell-1,j}(t) + \frac{t_{j+\ell+1} - t}{t_{j+\ell+1} - t_{j+1}} B_{\ell-1,j+1}(t)$$

berechnen. Dabei ist die folgende *Zusatzregel* zu berücksichtigen: Tritt in einem der beiden Summanden von (5.23) der Nenner Null auf, so ist der entsprechende Summand wegzulassen.

b) Wählt man die Knoten  $t_j$  nach (5.29) und bildet jeweils die Mittelwerte  $x_j := (\sum_{i=1}^m t_{i+j})/m$ ,  $j = -m, \dots, n - 1$ , so wird zu  $f \in C[t_0, t_n]$  durch

$$s_f(t) := \sum_{j=-m}^{n-1} f(x_j) B_{m,j}(t) \quad (5.30)$$

ein Spline  $s_f \in S_m(t_0, \dots, t_n)$  definiert.

$s_f$  ist *kein* interpolierender Spline, jedoch wird durch  $s_m(f) := s_f$ , analog zu (4.6) und (4.18), ein positiver, linearer Approximationsoperator  $s_m : C[t_0, t_n] \rightarrow S_m(t_0, \dots, t_n)$  definiert.

$s_f$  heißt nach Schoenberg *variationsvermindernder Spline*. Anwendungen finden variationsvermindernde Splines im CAD (computer aided design).

## Der Satz von Schoenberg, Whitney.

Wir betrachten die folgende **Interpolationsaufgabe (5.31)**:

Zu vorgegebenen *Spline-Knoten*  $a = t_0 < \dots < t_n = b$  und (evtl. von diesen verschiedenen) *Interpolationsknoten*  $a \leq x_1 < \dots < x_{n+m} \leq b$  wird zu  $f \in C[a, b]$  eine Splinefunktion  $s_f \in S_m(t_0, \dots, t_n)$  gesucht mit

$$\forall i = 1, \dots, n + m : s_f(x_i) = f(x_i).$$

Man beachte, dass Spline-Knoten und Interpolationsknoten in der obigen Formulierung der Interpolationsaufgabe durchaus verschieden sein können. Andererseits

treten keine zusätzlichen Randbedingungen wie in (5.8) auf, da die Anzahl der Interpolationsknoten mit der Dimension des Spline-Raumes übereinstimmt.

Wir fragen nun, für welche Knotenwahl  $(t_j)$ ,  $(x_i)$  die obige Interpolationsaufgabe eindeutig lösbar ist. Eine Antwort gibt der folgende

**Satz (5.32) (Schoenberg, Whitney, 1953)**

Die Interpolationsaufgabe (5.31) besitzt genau dann für jedes  $f \in C[a, b]$  eine eindeutige Lösung, wenn die folgende *Knotenbedingung* erfüllt ist:

$$\forall j = 1, 2, \dots, n-1 : \quad x_j < t_j < x_{j+m+1}. \quad (5.33)$$

**Bemerkung:** Man mache sich die Aussage (5.33) für den Fall  $m = 1$  klar. Hier ist der Spline ein Polygonzug. Sie bedeutet:

$$x_1 \in [t_0, t_1[, \quad x_i \in ]t_{i-2}, t_i[ \quad (i = 2, \dots, n), \quad x_{n+1} \in ]t_{n-1}, t_n].$$

**Beweisidee zu (5.32):** Wir gehen wieder von einem beidseitig erweiterten Spline-Gitter (5.18) aus. Man überlegt sich zunächst, dass die Aussage (5.33) dann äquivalent ist zu den Vorzeichenbedingungen

$$\forall i = 1, 2, \dots, n+m : \quad B_{m, i-m-1}(x_i) > 0. \quad (5.34)$$

Ferner bedeutet die eindeutige Lösbarkeit der Interpolationsaufgabe, dass das folgende lineare Gleichungssystem bei beliebiger rechten Seite eine eindeutig bestimmte Lösung  $\alpha_j$ ,  $j = -m, \dots, n-1$ , besitzt

$$\sum_{j=-m}^{n-1} \alpha_j B_{m,j}(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n+m. \quad (5.35)$$

Wir zeigen (5.35)  $\Rightarrow$  (5.34): Wäre  $B_{m, i_0-m-1}(x_{i_0}) = 0$  für ein  $i_0 \in \{1, 2, \dots, n+m\}$ , so würde folgen  $x_{i_0} \leq t_{i_0-m-1}$  oder  $x_{i_0} \geq t_{i_0}$ .

Im ersten Fall ( $x_{i_0} \leq t_{i_0-m-1}$ ) ist  $B_{m,j}(x) = 0$  für  $j \geq i_0 - m - 1$  und  $x \leq x_{i_0}$ . Die ersten  $i_0$  Gleichungen von (5.35) lauten damit

$$\sum_{j=-m}^{i_0-m-2} \alpha_j B_{m,j}(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, 2, \dots, i_0.$$

Dies sind aber  $i_0$  Gleichungen für  $i_0 - 1$  Unbekannte. Es gibt also rechte Seiten  $f(x_i)$ , für die das Gleichungssystem keine Lösung besitzt.

Analog haben im zweiten Fall ( $x_{i_0} \geq t_{i_0}$ ) die letzten  $n+m+1-i_0$  Gleichungen von (5.35) die Form

$$\sum_{j=i_0-m}^{n-1} \alpha_j B_{m,j}(x_i) = f(x_i), \quad i = i_0, i_0+1, \dots, n+m.$$

Auch dieses Gleichungssystem hat weniger Unbekannte als Gleichungen, ist also nicht für alle rechten Seiten lösbar.

Zur Umkehrung zeigt man, dass das homogene lineare Gleichungssystem (also  $f(x_i) = 0$  in (5.35)) unter der Voraussetzung (5.34) nur die triviale Lösung  $\alpha_j = 0$  besitzt.

Auf diesen technischeren Teil des Beweises verzichten wir hier und verweisen dazu auf das Lehrbuch von Powell.  $\square$

### Bemerkungen (5.36)

**a)** Unter der Voraussetzung des Schoenberg, Whitney'schen Satzes ist das für die numerische Berechnung zu lösende lineare Gleichungssystem (5.35) eindeutig lösbar, die Koeffizientenmatrix ist also regulär, nicht negativ und sie besitzt zudem Bandstruktur. Genauer:  $B_{m,j-m-1}(x_i) = 0$ , für  $|i - j| \geq m + 1$ . Das lineare Gleichungssystem lässt sich mit dem Gauß'schen Eliminationsverfahren (ohne Pivotsuche!) effizient und numerisch stabil lösen.

**b)** Haben Spline- und Interpolationsknoten die im Schoenberg, Whitney'schen Satz geforderte Anordnung, so ist durch die Zuordnung

$$s_m : C[a, b] \rightarrow S_m(t_0, \dots, t_n), \quad s_m(f) = \sum_{j=-m}^{n-1} \alpha_j B_{m,j}, \quad (5.37)$$

mit  $\alpha_j$  nach (5.35), ein *stetiger linearer Projektor* gegeben. Insbesondere lässt sich die Güte der Spline- Approximation mit dem Lemma von Lebesgue abschätzen

$$\|f - s_m(f)\|_\infty \leq (1 + \|s_m\|_\infty) d_{S_m(t_0, \dots, t_n)} f \quad (5.38)$$

ähnlich wie bei der Interpolation durch Polynome ist die Wahl der Interpolationsknoten für die Größe der Operatornorm entscheidend.

**c)** Wählt man die Spline-Knoten gemäß (5.29) (also mehrfache Knoten in den beiden Intervallenden) und die Interpolationsknoten gemäß

$$x_i := (t_{i-m} + \dots + t_{i-1})/m, \quad i = 1, \dots, n + m, \quad (5.39)$$

so sind die Voraussetzungen des Schoenberg, Whitney'schen Satzes erfüllt.

Für  $m = 2$  gilt dann die folgende Abschätzung für die Operatornorm  $\|s_2\|_\infty \leq 2$ .

Für  $m = 3$  gilt unter gleichen Voraussetzungen  $\|s_3\|_\infty \leq 27$  (de Boor, 1975).

**d)** Wir beschließen den Abschnitt mit zwei Abschätzungen für die Minimalabweichung  $d_{S_m(\Delta)} f$  einer stetigen Funktion  $f \in C[a, b]$  zum Spliner Raum  $S_m(\Delta)$ , wobei wie bisher  $\Delta := \{a = t_0 < \dots < t_n = b\}$  das Spline-Gitter und

$$h := \|\Delta\| := \max\{|t_{j+1} - t_j| : j = 0, \dots, n - 1\} \quad (5.40)$$

den maximale Knotenabstand (die *Feinheit* des Gitters) bezeichnet.

Allgemein lässt sich dann die folgende Abschätzung zeigen

$$f \in C[a, b] \Rightarrow d_{S_m(\Delta)} f \leq \omega_f((m+1)h/2). \quad (5.41)$$

Dabei ist  $\omega_f(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| \leq \delta\}$  der *Stetigkeitsmodul* der Funktion  $f$ .

Insbesondere konvergiert die Minimalabweichung gegen Null mit  $h \downarrow 0$ . Der Raum der Splinefunktionen vom Grad  $m$  liegt also dicht in  $C[a, b]$ .

Ist  $f \in C^1[a, b]$  sogar eine  $C^1$ -Funktion, so gilt bekanntlich (Mittelwertsatz)  $\omega_f(\delta) \leq \|f^{(1)}\|_\infty \delta$  und damit folgt aus (5.41)

$$f \in C^1[a, b] \Rightarrow d_{S_m(\Delta)} f \leq \frac{m+1}{2} \|f^{(1)}\|_\infty \|\Delta\|. \quad (5.42)$$

In Verallgemeinerung von (5.42) gilt für eine  $C^k$ -Funktion mit  $k \leq m+1$

$$f \in C^k[a, b], \quad k \leq (m+1) \Rightarrow d_{S_m(\Delta)} f \leq \frac{(m+1)!}{2^k (m+1-k)!} \|f^{(k)}\|_\infty \|\Delta\|^k. \quad (5.43)$$



**Isaac Schoenberg**  
1903 – 1990

... Schoenberg is noted worldwide for his realisation of the importance of spline functions for general mathematical analysis and in approximation theory, their key relevance in numerical procedures for solving differential equations with initial and/or boundary conditions, and their role in the solution of a whole host of variational problems. The fundamental papers by Schoenberg [two papers in 1946] form a monument in the history of the subject as well as its inauguration. (S. Karlin: To I. J. Schoenberg and his mathematics, J. Approx. Theory, Vol.8, 1973.)

For the next 15 years, Schoenberg had splines all to himself. This changed around 1960, when computers became more widespread and splines first assumed their role as the premier tool for data fitting and computer-aided geometric design. Schoenberg's more than 40 papers on splines after 1960 gave much impetus to the rapid development of the field. (R. Askey and C. de Boor: Im Memoriam: I. J. Schoenberg (1903–1990), J. Approx. Theory, Vol. 63, 1990.)