

4. Der Weierstraßsche Approximationssatz

Wir geben in diesem Abschnitt einen konstruktiven Beweis des Weierstraßschen Approximationssatzes, der mit den so genannten Bernstein-Polynomen (Felix Bernstein, 1878-1956) arbeitet.

Definition (4.1) Ein Operator $L : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ heißt *monoton*, falls

$$\forall f, g \in C[a, b] : f \leq g \Rightarrow L(f) \leq L(g).$$

Ist $L : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ ein *linearer* Operator, so ist L genau dann *monoton*, falls er *positiv* ist, d.h.

$$\forall f \in C[a, b] : f \geq 0 \Rightarrow L(f) \geq 0.$$

Bemerkung (4.2)

Lineare, monotone Operatoren sind stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ mit Operatornorm $\|L\|_\infty = \|L(1)\|_\infty$.

Beweis: Aus $f \leq \|f\|_\infty 1$ folgt durch Anwendung des Operators L :

$$L(f) \leq \|f\|_\infty L(1), \quad \text{also} \quad \|L(f)\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|L(1)\|_\infty.$$

Da speziell für $f = 1$ hier Gleichheit gilt, folgt die Behauptung. \square

Satz (4.3) (Korovkin I)

Sei $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ eine Folge linearer, monotoner Operatoren. Gilt dann für die drei Funktionen $f_k(t) := t^k$, $k = 0, 1, 2$, die gleichmäßige Konvergenz $L_n(f_k) \rightarrow f_k$, $n \rightarrow \infty$, bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, so folgt die gleichmäßige Konvergenz $L_n(f) \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty$, für *alle* stetigen Funktionen $f \in C[a, b]$.

Beweis: Wir führen den Beweis in drei Teilschritten.

Schritt (A): Ist $\Phi_n : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge linearer, positiver Funktionale und gelten mit $\psi_\alpha(x) := (x - \alpha)^2$ und $\alpha \in [a, b]$ die Bedingungen

$$\Phi_n(1) \rightarrow 1, \quad \Phi_n(\psi_\alpha) \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty),$$

so folgt $\Phi_n(f) \rightarrow f(\alpha)$ für *jedes* $f \in C[a, b]$.

Beweis zu (A): Zunächst ist f auf $[a, b]$ beschränkt, es gibt also ein $M > 0$ mit $-M \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in [a, b]$. Damit gilt auch

$$\forall x \in [a, b] : -2M \leq f(x) - f(\alpha) \leq 2M. \quad (1)$$

Aus der Stetigkeit von f folgt weiter für beliebiges $\varepsilon > 0$ die Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$\forall x \in [a, b]: |x - \alpha| < \delta \Rightarrow -\varepsilon \leq f(x) - f(\alpha) \leq \varepsilon. \quad (2)$$

(1) und (2) zusammen ergeben die Abschätzung

$$\forall x \in [a, b]: -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2} \psi_\alpha(x) \leq f(x) - f(\alpha) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \psi_\alpha(x). \quad (3)$$

Für $|x - \alpha| < \delta$ folgt dies direkt aus (2), da ja δ und M positiv und $\psi_\alpha(x)$ nichtnegativ sind. Ist dagegen $|x - \alpha| \geq \delta$, so ist $\psi_\alpha(x)/\delta^2 \geq 1$, so dass sich (3) aus (1) ergibt.

Auf (3) wenden wir nun die positiven Funktionale Φ_n an und erhalten

$$-\varepsilon \Phi_n(1) - \frac{2M}{\delta^2} \Phi_n(\psi_\alpha) \leq \Phi_n(f) - f(\alpha) \Phi_n(1) \leq \varepsilon \Phi_n(1) + \frac{2M}{\delta^2} \Phi_n(\psi_\alpha).$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt mit den Voraussetzungen: Jeder Häufungspunkt der Folge $\Phi_n(f)$ liegt im Intervall $[f(\alpha) - \varepsilon, f(\alpha) + \varepsilon]$. Da dies nun für *jedes* $\varepsilon > 0$ gilt, folgt die Behauptung.

Schritt (B): Ist $\Phi_n : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Folge linearer, positiver Funktionale und gelten mit $\alpha \in [a, b]$ die Bedingungen

$$\Phi_n(1) \rightarrow 1, \quad \Phi_n(x) \rightarrow \alpha, \quad \Phi_n(x^2) \rightarrow \alpha^2, \quad (n \rightarrow \infty),$$

so folgt $\Phi_n(f) \rightarrow f(\alpha)$ für *jedes* $f \in C[a, b]$.

Beweis zu (B): Mit den obigen Voraussetzungen folgt durch Ausmultiplizieren:

$$\Phi_n(\psi_\alpha) = \Phi_n(x^2) - 2\alpha \Phi_n(x) + \alpha^2 \Phi_n(1) \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty),$$

und damit die Behauptung nach (A).

Schritt (C): Wir übertragen (A), (B) auf eine Folge linearer, monotoner (positiver) Operatoren $L_n : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$. Dazu sehen wir den Parameter $\alpha \in [a, b]$ nun als variabel an. Wie in (A) findet man

$$\forall x, \alpha \in [a, b]: -2M \leq f(x) - f(\alpha) \leq 2M, \quad (1')$$

$$\forall x, \alpha \in [a, b]: |x - \alpha| < \delta \Rightarrow -\varepsilon \leq f(x) - f(\alpha) \leq \varepsilon, \quad (2')$$

$$\forall x, \alpha \in [a, b]: -\varepsilon - \frac{2M}{\delta^2} \psi_\alpha(x) \leq f(x) - f(\alpha) \leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \psi_\alpha(x). \quad (3')$$

Bei (2') hat man die gleichmäßige Stetigkeit von f zu beachten, so dass δ tatsächlich nur von ε abhängt.

Die Anwendung von L_n auf (3') (bei festem α) ergibt

$$-\varepsilon L_n(1) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_\alpha) \leq L_n(f) - f(\alpha) L_n(1) \leq \varepsilon L_n(1) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_\alpha).$$

oder

$$-(\varepsilon - f(\alpha)) L_n(1) - \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_\alpha) \leq L_n(f) \leq (\varepsilon + f(\alpha)) L_n(1) + \frac{2M}{\delta^2} L_n(\psi_\alpha).$$

Nun konvergieren $L_n(1)(t) \rightarrow 1$ und $L_n(\psi_\alpha)(t) \rightarrow (t^2 - 2\alpha t + \alpha^2)$ gleichmäßig auf $[a, b]$ für $n \rightarrow \infty$. Letzteres sieht man wieder durch Ausmultiplizieren und Anwendung der Voraussetzungen des Satzes. Zum vorgegebenen $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $N = N(\varepsilon)$, so dass der Abstand zu den Grenzwerten für alle $n \geq N$ und $t \in [a, b]$ höchstens ε (im ersten Fall) bzw. $\varepsilon \delta^2$ (für den zweiten Grenzwert) beträgt. Speziell für $t = \alpha$ ergibt sich damit die Abschätzung ($n \geq N(\varepsilon)$)

$$-(\varepsilon - f(\alpha))(1 + \varepsilon) - 2M\varepsilon \leq L_n(f)(\alpha) \leq (\varepsilon + f(\alpha))(1 + \varepsilon) + 2M\varepsilon,$$

und damit die *gleichmäßige* Konvergenz $L_n(f)(\alpha) \rightarrow f(\alpha)$ für $n \rightarrow \infty$. \square

Für den Raum der reellen, stetigen, 2π -periodischen Funktionen

$$C_{2\pi} := \{f \in C(\mathbb{R}) : \forall t \in \mathbb{R} : f(t + 2\pi) = f(t)\} \quad (4.4)$$

lässt sich die folgende Variante des Korovkinschen Satzes zeigen:

Satz (4.5) (Korovkin II)

Sei $L_n : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ eine Folge linearer, monotoner Operatoren. Gilt dann für die drei Funktionen $f_0(t) := 1$, $f_1(t) := \cos t$ und $f_2(t) := \sin t$ die gleichmäßige Konvergenz $L_n(f_k) \rightarrow f_k$, $n \rightarrow \infty$, so folgt hieraus die gleichmäßige Konvergenz $L_n(f) \rightarrow f$, $n \rightarrow \infty$, für *alle* Funktionen $f \in C_{2\pi}$.

Definition (4.6) (Bernstein, 1912)

Die Operatoren $B_n : C[0, 1] \rightarrow \Pi_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, definiert durch

$$B_n(f)(t) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

heißen *Bernstein-Operatoren*.

Bemerkungen (4.7)

a) $B_n(f)(t)$ ist stets eine Konvexkombination der teilnehmenden Funktionswerte $f(k/n)$. Man beachte insbesondere die Ähnlichkeit zur binomischen Formel

$$B_n(1)(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = (t + (1-t))^n = 1.$$

Man beachte aber auch die Ähnlichkeit zur Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynoms in den Knoten $t_k := k/n$.

b) B_n ist offensichtlich ein linearer Operator. Er ist auch positiv und damit monoton,

$$f \geq 0 \Rightarrow B_n(f) \geq 0,$$

er ist jedoch *kein* Projektor. Für das Lagrange-Polynom ℓ_j zu den Knoten t_k ergibt sich nämlich

$$B_n(\ell_j)(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \neq \ell_j(t).$$

Satz (4.8)

Für alle stetigen Funktionen $f \in C[0, 1]$ konvergieren die Bernstein-Approximationen auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen f : $B_n(f) \rightarrow f$, ($n \rightarrow \infty$).

Beweis: Nach dem Satz von Korovkin genügt es zu zeigen, dass $B_n(f_k) \rightarrow f_k$, gleichmäßig auf $[0, 1]$, für $f_k(t) := t^k$ und $k = 0, 1, 2$ gilt.

k = 0: $B_n(1)(t) = 1 \rightarrow 1, \quad (n \rightarrow \infty)$

k = 1:

$$\begin{aligned} B_n(t)(t) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \frac{k}{n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)! ((n-1)-(k-1))!} t^k (1-t)^{(n-1)-(k-1)} \\ &= t (t + (1-t))^{n-1} = t \rightarrow t, \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

k = 2: Durch elementare Umformung rechnet man nach

$$B_n(t^2)(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} (k/n)^2 = \frac{n-1}{n} t^2 + \frac{1}{n} t.$$

Damit wird

$$\begin{aligned} \|B_n(t^2) - t^2\|_\infty &= \max_{t \in [0,1]} \left| \frac{n-1}{n} t^2 + \frac{1}{n} t - t^2 \right| \\ &= \frac{1}{n} \max_{t \in [0,1]} | -t^2 + t | = \frac{1}{4n} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad \square$$

Folgerung (4.9) (Approximationssatz I; Weierstraß 1885)

Zu einer stetigen Funktion $f \in C[a, b]$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein Polynom $p \in \Pi[a, b]$ mit $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$. Anders ausgedrückt: Der Polynomraum $\Pi[a, b]$ liegt dicht in $C[a, b]$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.

Bemerkungen (4.10)

a) Für praktische Approximationen sind die Bernstein-Operatoren nur bedingt geeignet, da die Konvergenz sehr langsam ist. Dies wird durch die im Beweis zu Satz (4.8) aufgezeigte Beziehung $\|B_n(t^2) - t^2\|_\infty = 1/(4n)$ verdeutlicht. Andererseits hat die Approximation $B_n(f)$ theoretisch interessante Eigenschaften, vgl. z.B. den Satz (4.13). In Abbildung 4.1 ist die Bernstein Approximation zu $f(t) := \sin(3\pi t)$ für $n = 10$ und $n = 100$ dargestellt.

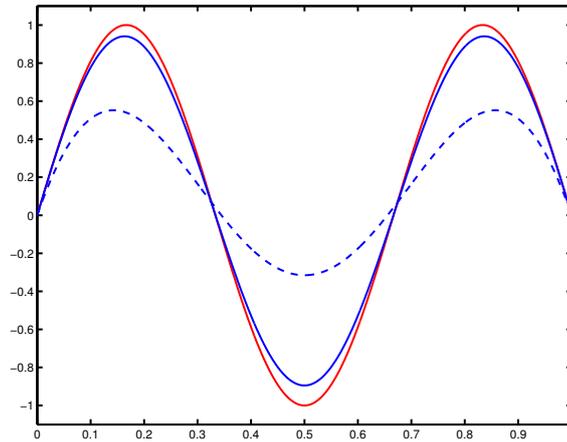


Abb. 4.1 Bernstein Approximation, $n = 10, 100$.

b) Zur numerischen Auswertung der Bernstein-Operatoren lassen sich die *Bernstein-Polynome*

$$B_k^n(t) := \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n, \quad (4.11)$$

verwenden. Diese lassen sich wie folgt rekursiv berechnen

$$B_k^n(t) = t B_{k-1}^{n-1}(t) + (1-t) B_k^{n-1}(t), \quad B_0^0(t) := 1, \quad B_{-1}^{n-1}(t) := B_n^{n-1}(t) := 0. \quad (4.12)$$

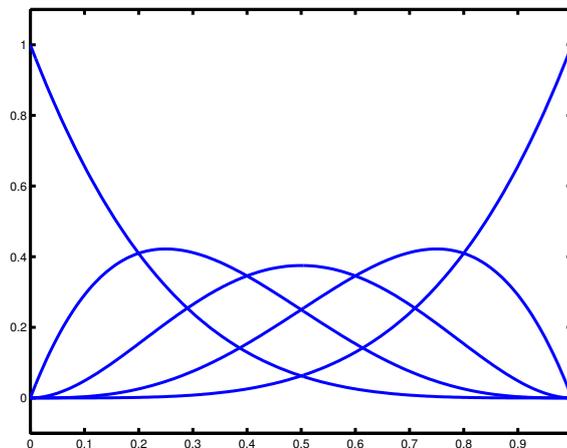


Abb. 4.2 Bernstein Polynome B_k^4 .

Satz (4.13)

Für alle stetig differenzierbaren Funktionen $f \in C^1[0, 1]$ konvergieren auch die ersten Ableitungen der Bernstein Approximationen $B_n(f)$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen f' : $B_n(f)' \rightarrow f'$, $n \rightarrow \infty$.

Beweis: Nach dem Satz (4.8) gilt $B_n(f') \rightarrow f'$ gleichmäßig auf $[0, 1]$. Es genügt daher zu zeigen, dass

$$\|B_n(f') - B_{n+1}(f')'\|_\infty \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Hierzu formen wir um

$$\begin{aligned} B_{n+1}(f)'(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} t^k (1-t)^{n+1-k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(n+1)!}{(k-1)!(n+1-k)!} t^{k-1} (1-t)^{n+1-k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) \\ &\quad - \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} f\left(\frac{k}{n+1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k} \left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right) \right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f\left[\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}\right] \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} f'(\tau_k), \quad \frac{k}{n+1} < \tau_k < \frac{k+1}{n+1}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |B_n(f')(t) - B_{n+1}(f)'(t)| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left(f'\left(\frac{k}{n}\right) - f'(\tau_k) \right) \right| \\ &\leq \max_{k=0, \dots, n} \left| f'\left(\frac{k}{n}\right) - f'(\tau_k) \right| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Wir sehen uns im Folgenden noch kurz eine Variante des Weierstraßschen Approximationsatzes für periodische Funktionen an. Dazu sei mit

$$\mathbb{T}_n := \left\{ f \in C_{2\pi} : f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)], \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\} \quad (4.14)$$

der $(2n+1)$ -dimensionale Vektorraum der (reellen) trigonometrischen Polynome vom Maximalgrad n bezeichnet. Bekanntlich bilden die Funktionen $\cos(kt)$, $\sin(kt)$ eine

orthogonale Basis von \mathbb{T}_n bezüglich des Standard - Skalarproduktes. Jedem $f \in C_{2\pi}$ wird die Fourier - Summe

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k \geq 0, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k > 0, \end{aligned} \quad (4.15)$$

zugeordnet. $S_n(f)$ lässt sich als Projektion von $C_{2\pi}$ auf \mathbb{T}_n deuten. Man beachte, dass die Fourier-Koeffizienten a_k und b_k vom Approximationsgrad n unabhängig sind. Wir werden uns später mit der Approximationsgüte $S_n(f) - f$ und der Konvergenzeigenschaft $S_n(f) \rightarrow f$ ausführlicher beschäftigen. Wir geben zunächst eine Integraldarstellung der Fourier-Summe an, die sich aus einfachen trigonometrischen Umformungen ergibt.

Satz (4.16) (Integraldarstellung)

Für $f \in C_{2n}$ gilt

$$S_n(f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sin[(n+1/2)(x-t)]}{2 \sin[(x-t)/2]} dx$$

Der Kern in dieser Integraldarstellung $D_n(\theta) := \frac{\sin[(n+1/2)\theta]}{2 \sin[\theta/2]}$ heißt auch *Dirichlet - Kern*.

Beweis: Nach Einsetzen der Koeffizienten in (4.15) ergibt sich

$$\begin{aligned} S_n(f)(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt) \cos(k\theta) + \sin(kt) \sin(k\theta) \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k(t-\theta)) \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t+\theta) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta) \right\} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t+\theta) D_n(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung ergibt sich aufgrund der (2π) - Periodizität des Integranden, die letzte Gleichung durch Ausmultiplizieren von $\sin(\theta/2) \{1/2 + \sum_{k=1}^n \cos(k\theta)\}$ und Anwendung der Relation $\cos \alpha \sin \beta = 0.5 (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta))$. \square

Die Fourier-Summe selbst ist noch nicht zur Anwendung des zweiten Korovkinschen Satzes geeignet, da S_n nicht positiv ist. Statt dessen definieren wir den *Fejér - Operator* durch

$$F_n(f)(t) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(t), \quad f \in C_{2\pi}. \quad (4.17)$$

Setzt man die Integraldarstellungen (4.16) herein ein, so ergibt sich mittels trigonometrischer Umformung die folgende Darstellung für den Fejér-Operator

$$F_n(f)(t) := \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sin^2[(n/2)(x-t)]}{2 \sin^2[(x-t)/2]} dx \quad (4.18)$$

Der Kern dieses Integralausdrucks $\sigma_n(\theta) := \frac{\sin^2[(n/2)\theta]}{2n \sin^2[\theta/2]}$ heißt entsprechend der *Fejér - Kern* von f .

Anhand der Darstellung (4.18) sieht man, dass F_n ein linearer und monotoner (positiver) Operator auf $C_{2\pi}$ ist. Ferner ergibt sich direkt aus der Definition der Fourier-Summe

$$\begin{aligned} F_n(1)(t) &= 1 \rightarrow 1 \\ F_n(\cos)(t) &= \frac{n-1}{n} \cos t \rightarrow \cos t \\ F_n(\sin)(t) &= \frac{n-1}{n} \sin t \rightarrow \sin t, \end{aligned} \quad (4.19)$$

wobei die Konvergenz jeweils gleichmäßig ist. Damit sind die Voraussetzungen des Korovkinschen Satzes (4.5) erfüllt und wir erhalten den zweiten Weierstraßschen Approximationssatz.

Satz (4.20) (Approximationssatz II; Weierstraß)

Zu einer stetigen, 2π -periodischen Funktion $f \in C_{2\pi}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein trigonometrisches Polynom $p \in \mathbb{T} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ mit $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$. Anders ausgedrückt: Die trigonometrischen Polynome \mathbb{T} liegen dicht in $C_{2\pi}$ bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm.



Karl Weierstrass
1815 – 1897