2. Existenz, Eindeutigkeit und Stabilität

Vorgegeben sei eine Approximationsaufgabe für einen normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum $(R, \|\cdot\|)$ und eine nichtleere Teilmenge $V \subset R$.

Existenz.

Wir geben zunächst zwei Sätze an, die die Existenz einer Bestapproximation, d.h. einer Lösung der obigen Approximationsaufgabe garantieren.

Satz (2.1) (Existenz I)

Ist V eine *kompakte* Teilmenge von R, so existiert eine Bestapproximation von V an $f \in R$.

Beweis: Die Abbildung $p \mapsto \|f - p\|$ ist stetig und nimmt daher auf V ein Minimum an. $\square$

Satz (2.2) (Existenz II)

Ist V ein *endlich dimensionaler* linearer Teilraum von R, so existiert zu jeden $f \in R$ eine Bestapproximation.

Beweis: Die Menge $V_0 := \{p \in V : \ \|p\| \le 2\,\|f\|\}$ ist kompakt – als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge eines endlich dimensionalen Teilraumes. Nach (2.1) existiert daher ein $p^* \in V$ mit $\|f - p^*\| \le \|f - p\|$, für alle $p \in V_0$.

Für die anderen $p \in V \setminus V_0$ gilt aber ebenfalls wegen $0 \in V$:

$$\|f - p\| \ \ge\ \|p\| - \|f\| \ >\ 2\,\|f\| - \|f\| \ =\ \|f - 0\| \ \ge\ \|f - p^*\|. \qquad \square$$

Unter weiteren Voraussetzungen an R lassen sich die Voraussetzungen an V abschwächen

Satz (2.3) (Existenz III)

Ist $(R, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein reeller Hilbert-Raum und V ein *abgeschlossener* linearer Teilraum von R, so existiert zu jedem $f \in R$ eine Bestapproximation.

Beweis: Sei $(p_n) \in V^{\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge, also $\|p_n - f\| \to d_V(f)$ $(n \to \infty)$. Mit der Parallelogrammgleichung $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \ =\ 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ folgt dann

$$\begin{aligned} \|p_n \ - \ p_m\|^2 \ &= \ 2\,\|p_n - f\|^2 \ + \ 2\,\|p_m - f\|^2 \ - \ 4\|\frac{p_n + p_m}{2} - f\|^2 \\ &\le \ 2\big(\|p_n - f\|^2 \ + \ \|p_m - f\|^2\big) \ - \ 4\,d_V(f)^2. \end{aligned}$$

Damit ist (p_n) eine Cauchy-Folge und somit, da R vollständig ist, konvergent. Da V abgeschlossen ist, ist auch $p^* := \lim_{n\to\infty} p_n \in V$, und somit $\|p^* - f\| = d_V(f)$. $\square$

Wir geben noch eine Kennzeichnung der Bestapproximation an für den Fall, dass R ein Hilbert-Raum ist:

Satz (2.4) (Orthogonalität)

Ist V ein *abgeschlossener* linearer Teilraum eines Hilbert-Raumes $(R, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so gilt für $f \in R \setminus V$ und $p^* \in V$: p^* Bestapproximation $\Leftrightarrow$ $e := f - p^* \perp V$.

Für $V \neq R$ ist somit aufgrund des Existenzsatzes (2.3) insbesondere $V^\perp \neq \{0\}$.

Beweis: Ist $p^* \in V$ Bestapproximation von f und $e := f - p^*$, so folgt für $p \in V \setminus \{0\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \|f - p^*\|^2 &\leq \|f - p^* + \alpha p\|^2 \\ &= \|f - p^*\|^2 + 2\alpha\langle f - p^*, p\rangle + \alpha^2 \|p\|^2, \end{aligned}$$

also für alle α: $0 \leq 2\alpha\langle e, p\rangle + \alpha^2 \|p\|^2$.

Bildet man hier die Grenzwerte $\alpha \uparrow 0$ und $\alpha \downarrow 0$, so ergibt sich $\langle e, p\rangle = 0$.

Die Umkehrung folgt ebenfalls aus der obigen Relation mit $\alpha = 1$. $\square$

Konvexität.

Um auf einfache Art zu Eindeutigkeitsaussagen zu kommen, werden häufig Konvexitätsannahmen verwendet.

Definition (2.5) Eine Teilmenge $S \subset R$ heißt *konvex*, falls

$$\forall\, x, y \in S : \forall\, \theta \in]0,1[: x + \theta\,(y - x) \in S.$$

Sie heißt *strikt konvex*, falls sogar

$$\forall\, x \neq y \in S : \forall\, \theta \in]0,1[: x + \theta\,(y - x) \in S^0.$$

Dabei bezeichnet S^0 das topologisch Innere von S.

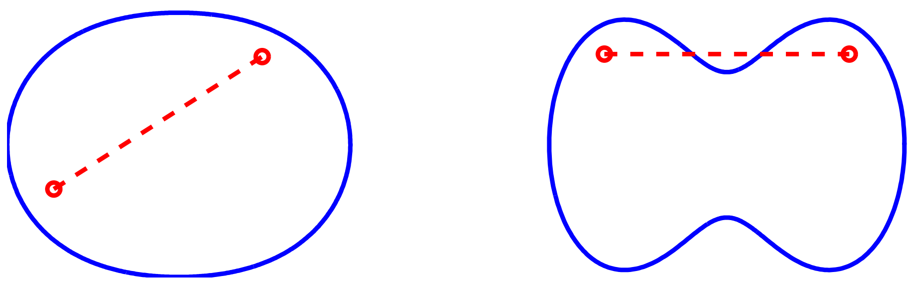

Abb.2.1. Konvexe und nicht konvexe Menge.

Satz (2.6) Offene oder abgeschlossene Normkugeln

$$K_r(f) := \{g \in R:\ \|g - f\| < r\}, \quad \overline{K}_r(f) := \{g \in R:\ \|g - f\| \le r\}$$

sind stets konvex.

Beweis: (o.E.d.A. für offene Kugeln) Sind $f_0,\, f_1 \in K_r(f)$ und $\theta \in]0,1[$, so folgt

$$\begin{aligned} &\|(f_0 + \theta(f_1 - f_0)) - f\| = \|(1-\theta)\,(f_0 - f) + \theta\,(f_1 - f)\| \\ &\le (1-\theta)\,\|f_0 - f\| + \theta\,\|f_1 - f\| < (1-\theta)\,r + \theta\,r = r. \quad \square \end{aligned}$$

Satz (2.7) Ist $V \subset R$ nichtleer und konvex, so ist auch die Menge $B(f,V)$ der Bestapproximationen von V an f konvex.

Beweis: Mit $r := d_V(f)$ ist $B(f,V) = V \cap \overline{K}_r(f)$ als Schnitt konvexer Mengen konvex. $\square$

Definition (2.8) Die Norm $\|\cdot\|$ des Raumes R heißt *strikt konvex*, falls die abgeschlossenen Einheitskugel $\overline{K}_1(0)$ strikt konvex ist, falls also gilt

$$\forall\, f,g:\ f \ne g \,\wedge\, \|f\|,\ \|g\| \le 1 \,\wedge\, \theta \in]0,1[\ \Rightarrow\ \|f + \theta\,(g - f)\| < 1.$$

Man sagt dann auch, dass der Raum R *strikt normiert* sei. Es ist klar, dass in einem strikt normierten Raum dann auch *alle* Normkugeln (offen oder abgeschlossen) strikt konvexe Mengen sind.

Satz (2.9) Die folgenden Eigenschaften sind paarweise äquivalent

a) $\|\cdot\|$ ist strikt konvex,

b) $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|,\ g \ne 0 \ \Rightarrow\ f = \alpha\, g,\ \alpha \ge 0,$

c) $\|f\| = \|g\| = 1,\ f \ne g \ \Rightarrow\ \|f + g\| < 2.$

Beweis:

a) $\Rightarrow$ c): Man setze $\theta := 0.5$.

c) $\Rightarrow$ b): Falls $f = 0$ ist, so gilt die Behauptung mit $\alpha = 0$. Es sei also $f \ne 0$. Ferner gelte: $\|f + g\| = \|f\| + \|g\|$ und es seien $\|g\|,\ \|f\| > 0$.

Dann folgt mit der Dreiecksungleichung und der Abschätzung $\|x - y\| \ge \|x\| - \|y\|$:

$$
\begin{aligned}
1 \;\geq\; \frac{1}{2}\left\|\frac{f}{\|f\|}+\frac{g}{\|g\|}\right\| \;&=\; \frac{1}{2}\left\|\left(\frac{f}{\|f\|}+\frac{g}{\|f\|}\right)-\left(\frac{g}{\|f\|}-\frac{g}{\|g\|}\right)\right\| \\
&\geq\; \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{f}{\|f\|}+\frac{g}{\|f\|}\right\|-\left\|\frac{g}{\|f\|}-\frac{g}{\|g\|}\right\|\right) \\
&=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\|f+g\|}{\|f\|}-\left(\frac{1}{\|f\|}-\frac{1}{\|g\|}\right)\|g\|\right) \\
&=\; \frac{1}{2}\left(\frac{\|f\|+\|g\|}{\|f\|}-\frac{\|g\|}{\|f\|}+\frac{\|g\|}{\|g\|}\right) \;=\; 1
\end{aligned}
$$

In dieser Ungleichungskette gilt damit durchgehend Gleichheit, insbesondere folgt aus der ersten Ungleichung

$$\left\|\frac{f}{\|f\|}+\frac{g}{\|g\|}\right\| \;=\; 2$$

Wegen c) muss daher $f/\|f\| \;=\; g/\|g\|$ sein, also $f=\alpha g$ mit $\alpha=\|f\|/\|g\|>0$.

b) $\Rightarrow$ a): Seien $\|f\|,\ \|g\|\leq 1,\ f\neq g$ und $\theta\in\,]0,1[$. Wegen

$$\|f+\theta(g-f)\| \;\leq\; (1-\theta)\|f\| \;+\; \theta\|g\|$$

gilt die Behauptung in a), falls $\|f\|<1$ oder $\|g\|<1$ ist.

Seien also $\|f\|=\|g\|=1$. Dann folgt

$$\|(1-\theta)f\| \;+\; \|\theta g\| \;=\; (1-\theta)\|f\| \;+\; \theta\|g\| \;=\; 1$$

und $\|(1-\theta)f \;+\; \theta g\| \;\leq\; 1$.

Wäre sogar $\|(1-\theta)f+\theta g\|=1$, so würde aus b) folgen, dass $(1-\theta)f=\alpha\theta g,\ \alpha\geq 0$.

Damit ist aber auch $f\;=\;\kappa g,\ \kappa\geq 0$ und aus $\|f\|\;=\;\|g\|\;=\;1$ folgt $\kappa\;=\;1$ und $f=g$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daher folgt $\|(1-\theta)f \;+\; \theta g\| \;<\; 1$, was zu zeigen war. □

Bemerkung (2.10) Für den $\mathbb{R}^n$ sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ *nicht* strikt konvex, wohingegen $\|\cdot\|_2$ strikt konvex ist. Allgemein gilt

Satz (2.11) Euklidische bzw. unitäre Vektorräume $(R,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ sind stets strikt konvex.

Beweis: Wir führen den Beweis für den reellen Fall und verwenden Satz (2.9).

Dazu seien $f,\, g \,\in\, R$ mit $f \neq g$ und $\|f\| \,=\, \|g\| \,=\, 1$. Für $\theta \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\begin{aligned}\Phi(\theta) \;&:=\; \|f \,+\, \theta\,(g-f)\|^2 \;=\; \langle f \,+\, \theta\,(g-f), f \,+\, \theta\,(g-f)\rangle \\ &=\; \|f\|^2 \,+\, 2\,\theta\,\langle f, g-f\rangle \,+\, \theta^2\,\|f-g\|^2.\end{aligned}$$

Damit ist Φ bezüglich des Parameters θ eine nach oben geöffnete Parabel (höchster Koeffizient $\|f-g\|^2 > 0$) mit $\Phi(0) = \Phi(1) = 1$. Hiermit folgt

$$\forall\,\theta\, \in]0,1[:\;\; \Phi(\theta) \,<\, 1.$$

Speziell für $\theta = 1/2$ ergibt sich die Aussage aus Satz (2.9) c). □

Satz von Clarkson (2.12)

Die L_p-Räume $(L^p, \|\cdot\|_p)$ sind für $1 < p < \infty$ gleichmäßig konvex, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert stets ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall f, g \in L^p,\; \|f\| = \|g\| = 1:\;\; \|0.5(f+g)\|_p \,>\, 1-\delta \Rightarrow\;\; \|f-g\|_p \,<\, \varepsilon.$$

Insbesondere sind damit nach Satz (2.9) c) die L^p-Normen $\|\cdot\|_p$, $1 < p < \infty$ auch strikt konvex.

Beweis: Siehe z.B. Hirzebruch, Scharlau.

Eindeutigkeit.

Satz (2.13) (Eindeutigkeit I)

Ist V strikt konvex, so existiert zu jedem $f \in R$ höchstens eine Bestapproximation von f aus V.

Beweis: O.E.d.A. sei der Minimalabstand $d := d_V(f) > 0$ positiv. Angenommen, $p_1 \neq p_2$ seien Bestapproximationen von f aus V, also $p_1,\, p_2 \in V$,

$$\|f \,-\, p_1\| \,=\, \|f \,-\, p_2\| \,=\, d.$$

Nach (2.7) ist dann auch $p^* \,=\, (p_1 + p_2)/2$ eine Bestapproximation von f aus V und wegen der strikten Konvexität zugleich ein innerer Punkt von V, also

$$\exists\,\varepsilon \in]0,d[:\;\; K_\varepsilon(p^*) \subset V, \quad \|f \,-\, p^*\| \,=\, d.$$

Für

$$q \;:=\; p^* + \frac{\varepsilon}{2\,d}\,(f-p^*) \;\in\; K_\varepsilon(p^*) \;\subset\; V$$

gilt dann

$$\|f \,-\, q\| \;=\; \big(1 \,-\, \frac{\varepsilon}{2\,d}\big)\;\|f \,-\, p^*\| \;<\; d.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von p^*. □

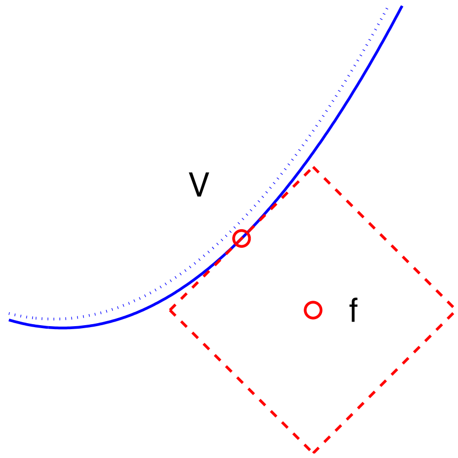

Abb. 2.2 Strikt konvexer Approximationsbereich.

Satz (2.14) (Eindeutigkeit II)

Ist V konvex, und die Norm $\|\cdot\|$ strikt konvex, so existiert zu jedem $f \in R$ höchstens eine Bestapproximation von f aus V.

Beweis: Sind $p_1 \neq p_2 \in V$ Bestapproximationen von f, so ist nach (2.7) auch $p := (p_1+p_2)/2 \in V$ eine Bestapproximation von f aus V. Nach Voraussetzung liegt diese jedoch im Innern der Normkugel $\overline{K}_d(f)$, $d = d_V(f)$, d.h. $\|f - p\| < d_V(f)$, im Widerspruch zum Minimalität von p_1 und p_2. $\square$

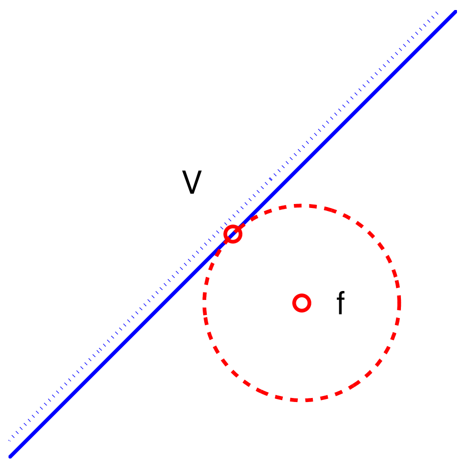

Abb. 2.3 Strikt konvexe Norm.

Folgerungen und Bemerkungen (2.15)

a) Ist R strikt normiert und V ein endlich dimensionaler linearere Teilraum von R, so existiert genau eine Bestapproximation von f aus V. Dies folgt aus (2.2) und (2.14). Das Gleiche gilt, falls R ein Hilbert-Raum und V ein abgeschlossener linearer Teilraum von R ist.

b) Aufgrund der Beispiele (1.13) aus Abschnitt 1 sind die Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathrm{C}[a,b]$ nicht strikt konvex.

c) Man kann zeigen: Ist R nicht strikt normiert, so gibt es ein $f \in R$ und einen endlich dimensionalen linearen Teilraum V von R, so dass f mehrere Bestapproximationen aus V besitzt; vgl. auch die Beispiele (1.13). Beweis im Skript von Geiger, Glashoff.

Stabilität.

Neben der Existenz und Eindeutigkeit einer Bestapproximation wird für Anwendungen benötigt, dass diese zumindest stetig von der zu approximierenden Funktion f abhängt. Wir bezeichnen diese Eigenschaft als *Stabilität* des Approximationsproblems.

Sei also wieder $(R, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $V \subset R$ eine nichtleere Teilmenge. Wir nehmen an, dass zu jedem $f \in R$ eine eindeutig bestimmte Bestapproximation $p_V(f) \in V$ von f aus V existiert. Die Abbildung $p_V : R \to V$ heißt *metrische Projektion.*

Tatsächlich ist p_V ein *Projektor auf* V, d.h. es gilt

$$\forall p \in V : \quad p_V(p) \;=\; p.$$

Satz (2.16) (Stabilität)

Ist V kompakt, so ist die metrische Projektion p_V stetig.

Beweis: Für eine Folge $f_k \in R$ gelte $f_k \to f \in R \; (k \to \infty)$. Wir wollen hieraus folgern, dass auch $p_V(f_k) \to p_V(f) \; (k \to \infty)$ konvergiert. Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, dass die obige Konvergenz nicht gelte.

Dann gäbe es eine Teilfolge (f_{k_j}) und ein $\delta > 0$, so dass $\|p_V(f_{k_j}) - p_V(f)\| \geq \delta$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Da V kompakt ist, besitzt die Folge $(p_V(f_{k_j}))$ eine weitere in V konvergente Teilfolge, die der Einfachheit halber ebenfalls mit $(p_V(f_{k_j}))$ bezeichnet werde und für die somit

$$p_V(f_{k_j}) \to p^* \in V \; (j \to \infty) \quad \text{und} \quad \|p_V(f_{k_j}) - p_V(f)\| \;\geq\; \delta \;>\; 0 \tag{2.17}$$

gelten.

Zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ sei nun $J(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass für alle $j \geq J(\varepsilon)$ gelten

$$\|p_V(f_{k_j}) \;-\; p^*\| \;<\; \varepsilon/3 \quad \text{und} \quad \|f \;-\; f_{k_j}\| \;<\; \varepsilon/3. \tag{2.18}$$

Damit folgt nun für $j \geq J(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\|f - p^*\| &\leq \|f - f_{k_j}\| + \|f_{k_j} - p_V(f_{k_j})\| + \|p_V(f_{k_j}) - p^*\| \\
&< \|f_{k_j} - p_V(f_{k_j})\| + 2\,\varepsilon/3 \\
&\leq \|f_{k_j} - p_V(f)\| + 2\,\varepsilon/3 \\
&\leq \|f_{k_j} - f\| + \|f - p_V(f)\| + 2\,\varepsilon/3 \\
&\leq \|f - p_V(f)\| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Erläuterung: Die erste Ungleichung gilt aufgrund der Dreiecksungleichung, die zweite wegen (2.18), die dritte Ungleichung folgt, da $p_V(f_{k_j})$ Bestapproximation von f_{k_j} aus V ist. Dann wird wieder die Dreiecksungleichung angewendet und schliesslich nochmals (2.18).

Aus der obigen Ungleichungskette folgt nun, da $\varepsilon > 0$ beliebig war, $\|f - p^*\| = \|f - p_V(f)\|$. Damit ist p^* Bestapproximation von f aus V und somit wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit $p^* = p_V(f)$.
Dies ist aber ein Widerspruch zu (2.17). □

Einschließung.

Wir beginnen mit einigen Vorbemerkungen über lineare Funktionale.

Es sei wie zuvor $(R, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum. Dann bildet die Menge R^* der stetigen, linearen Funktionale $\ell : R \to \mathbb{R}$ ebenfalls einen reellen Vektorraum, den so genannten *Dualraum* zu R

$$R^* := \{\,\ell \mid \ell : R \to \mathbb{R} \quad \text{linear und stetig}\,\}. \tag{2.19}$$

Es sei daran erinnert, dass die Stetigkeit eines linearen Funktionals ℓ äquivalent ist zur *Beschränktheit* des Funktionals

$$\ell \text{ stetig} \;\Leftrightarrow\; \exists\, C > 0 : \;\forall f \in R : \;(\|f\| \leq 1 \;\Rightarrow\; |\ell(f)| \leq C). \tag{2.20}$$

Beweis:
$\Rightarrow$: Aus der Stetigkeit von ℓ folgt

$$\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, \delta > 0 : \;\|f\| < \delta \;\Rightarrow\; |\ell(f)| < \varepsilon.$$

Speziell für $\varepsilon = 1$ ergibt sich mit $\delta = \delta(1)$:

$$\forall\, f : \|f\| \leq 1 \;\Rightarrow\; |\ell(\frac{\delta}{2}\,f)| < 1 \;\Rightarrow\; |\ell(f)| \leq \frac{2}{\delta} =: C.$$

$\Leftarrow$: Aus $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ folgt für $f_k \neq f$:

$$|\ell(f_k) - \ell(f)| = |\ell(f_k - f)| = \|f_k - f\|\,|\ell(\frac{f_k - f}{\|f_k - f\|})| \leq C\,\|f_k - f\| \to 0. \quad \square$$

Für stetige lineare Funktionale $\ell \in R^*$ ist daher der Ausdruck

$$\|\ell\| \;:=\; \sup_{f\neq 0} \frac{|\ell(f)|}{\|f\|} \;<\; \infty \tag{2.21}$$

endlich und hierdurch ist eine Norm $\|\cdot\|$ auf R^*, die so genannte *Operatornorm* definiert.

Der Dualraum eines reellen normierten Raumes $(R, \|\cdot\|)$ ist somit ebenfalls ein reeller normierter Raum. Er ist sogar vollständig, d.h. ein Banach-Raum, vgl. Hirzebruch, Scharlau.

Beispiele (2.22)

a) Auf dem Raum der stetigen Funktionen $(\mathrm{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ mit der Maximumsnorm $\|f\|_\infty := \max\{|f(t)| \,:\, a \leq t \leq b\}$ ist $\ell(f) := \int_a^b f(t)\,dt$ ein stetiges lineares Funktional mit

$$|\ell(f)| \;=\; |\int_a^b f(t)\,dt| \;\leq\; (b-a)\,\|f\|_\infty.$$

Da hierin für $f = 1$ Gleichheit gilt, folgt $\|\ell\| \;=\; (b-a)$.

b) Für $(\mathrm{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ und einem festen Punkt $t_0 \in [a,b]$ ist das *Punktfunktional* $\ell(f) := f(t_0)$ ein stetiges lineares Funktional mit $\|\ell\| = 1$.

c) In Verallgemeinerung hiervon ist zu einer festen Zerlegung $a \leq t_0 < \ldots < t_m \leq b$ und gegebenen Koeffizienten $\lambda_i \in \mathbb{R}$ auch durch

$$\ell(f) \;:=\; \sum_{i=0}^{m} \lambda_i\, f(t_i), \quad f \in \mathrm{C}[a,b], \tag{2.23}$$

ein stetiges lineares Funktional $\ell \in \mathrm{C}[a,b]^*$ gegeben mit $\|\ell\|_\infty \;=\; \sum_{i=0}^m |\lambda_i|$. Auch hierbei spricht man von einem Punktfunktional.

d) Auf $(\mathrm{C}^1[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist durch $\ell(f) := f'(t_0)$ ein lineares Funktional gegeben, $a < t_0 < b$. Dieses ist jedoch *nicht stetig*!

O.E.d.A. sei $t_0 = 0$. Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir die C^1-Funktion

$$f(t,\varepsilon) \;:=\; \arctan(t/\varepsilon).$$

Hierfür ergibt sich $\|f(\cdot,\varepsilon)\|_\infty \leq \pi/2$ und $\ell(f(\cdot,\varepsilon)) \;=\; f'(0,\varepsilon) \;=\; 1/\varepsilon$. Damit folgt

$$\frac{|\ell(f(\cdot,\varepsilon))|}{\|f(\cdot,\varepsilon)\|_\infty} \;\geq\; \frac{2}{\varepsilon\,\pi} \;\to\; \infty \quad (\varepsilon \downarrow 0).$$

Die Existenz stetiger linearer Funktionale lässt sich mit Hilfe des folgenden Satzes von Hahn-Banach zeigen:

Satz (2.24) (Hahn, Banach)
Jedes stetige lineare Funktional $\ell_0 \in U^*$ auf einem linearen Teilraum U von R besitzt eine stetige, lineare Fortsetzung auf R, $\ell \in R^*$, mit gleicher Norm: $\ell|_U = \ell_0$, und $\|\ell\| = \|\ell_0\|_U$.

Beweis: Siehe z.B. Hirzebruch, Scharlau.

Ist der zugrunde liegende Raum ein Hilbert-Raum $(R, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, so ist der Dualraum $(R^*, \|\cdot\|)$ isometrisch (und bijektiv) zum Ausgangesraum. Dies ist Inhalt des folgenden Rieszschen Darstellungssatzes.

Satz (2.25) (Riesz)
Sei $(R, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbert-Raum. Jedem $x \in R$ wird dann durch $\lambda_x(y) := \langle x, y\rangle$ ein stetiges lineares Funktional $\lambda_x \in R^*$ zugeordnet. Die hierdurch definierte Abbildung $\lambda : R \to R^*$ ist eine Isometrie (linear, bijektiv und normerhaltend). Insbesondere gibt es zu jedem stetigen linearen Funktional $\ell \in R^*$ genau ein $x \in R$ mit $\ell = \langle x, \cdot\rangle$.

Beweis:

Dass $\lambda_x : R \to \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung ist, folgt unmittelbar aus den Skalarprodukteigenschaften. Mittels der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt weiterhin:

$$|\lambda_x(y)| = |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Damit ist klar, dass λ_x stetig ist und dass $\|\lambda_x\| \leq \|x\|$ gilt. Speziell für $y := x$ ergibt sich $|\lambda_x(x)| = \|x\|^2$. Damit folgt schließlich $\|\lambda_x\| = \|x\|$.

Die Abbildung $\lambda : R \to R^*$ ist also wohldefiniert, normerhaltend und auch linear, wie man ebenfalls unmittelbar den Skalarprodukteigenschaften entnimmt.

Ist $x \in \mathrm{Kern}(\lambda)$, also $\lambda_x = 0$, so folgt $\langle x, y\rangle = 0$ für alle $y \in R$. Dann ist aber auch $x = 0$. Der Kern von λ ist also trivial und somit ist λ injektiv.

Es bleibt zu zeigen, dass λ auch surjektiv ist.

Sei dazu $\ell \in R^*$ und $V := \mathrm{Kern}(\ell)$. Da ℓ stetig ist, ist V ein *abgeschlossener* linearer Teilraum von R und für $\ell \neq 0$ ist auch $V \neq R$.

Sei nun gemäß Satz (2.4) $z \in R \setminus \{0\}$ mit $z \perp V$. Wir setzen $x := \alpha\, z$ mit $\alpha := \ell(z)/\|z\|^2$. Für $y \in R$ folgt dann:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle \alpha\, z, y\rangle = \langle \alpha\, z, \left(y - \frac{\ell(y)}{\ell(z)}\, z\right) + \frac{\ell(y)}{\ell(z)}\, z\rangle \\ &= 0 + \frac{\ell(y)}{\ell(z)}\, \alpha\, \langle z, z\rangle = \ell(y),\end{aligned}$$

wobei der erste Summand verschwindet, da $\left(y - \frac{\ell(y)}{\ell(z)}\, z\right) \in V$ und $z \perp V$.

Damit ist gezeigt, dass $\ell = \lambda_x$ gilt, also λ surjektiv ist. $\square$

Definition (2.26)

Sei nun wieder $(R, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum und $V \subset R$ ein nichtleerer linearer Teilraum von R. Wir sagen, ein stetiges lineares Funktional $\ell \in R^*$ ist *orthogonal* zu V, falls $\forall\, y \in V : \ell(y) = 0$. Die Menge aller zu V orthogonalen stetigen linearen Funktionale bildet offensichtlich einen linearen Teilraum von R^*. Dieser wird mit $V^\perp$ bezeichnet. $V^\perp$ heißt der *Orthogonalraum* zu V.

Im Fall eines reellen Hilbert-Raumes sind nach dem Rieszschen Satz alle stetigen linearen Funktionale von der Form $\ell = \lambda_x$, $x \in R$. Die Orthogonalität zu einem linearen Teilraum V,

$$0 \;=\; \ell(y) \;=\; \lambda_x(y) \;=\; \langle x, y\rangle, \quad \forall\, y \in V,$$

stimmt daher mit dem üblichen Orthogonalitätsbegriff, $x \perp V$, überein.

Mit Hilfe des Orthogonalraumes gelangen wir nun zu einer *unteren Schranke* für die Minimalabweichung $d_V(f)$ einer Approximationsaufgabe. Eine obere Schranke erhalten wir dagegen sehr leicht durch irgendein Element $p \in V$, da ja immer $d_V(f) \le \|f - p\|$ gilt.

Satz (2.27) (Dualität)

Sei $(R, \|\cdot\|)$ ein reeller normierter Raum, $f \in R$ und V ein linearer Teilraum von R.

a) Ist $\ell \in V^\perp$ und $\|\ell\| \le 1$, so folgt $|\ell(f)| \le d_V(f)$.

b) Es gibt ein stetiges lineares Funktional $\ell_f \in V^\perp$ mit $\|\ell_f\| \le 1$ und $|\ell_f(f)| = d_V(f)$.

Anmerkungen (2.28)

a) ℓ_f heißt wegen der obigen Eigenschaften auch ein *maximales (stetiges, lineares) Funktional.* Ist $d_V(f) > 0$, also $f \notin \overline{V}$, so ist auch $\|\ell_f\| = 1$.

b) Gilt für ein stetiges, lineares Funktional $\ell \in V^\perp$, $\ell \neq 0$ und ein $p \in V$

$$|\ell(f)| \;=\; \|\ell\|\,\|f - p\,\|,$$

so ist p eine Bestapproximation von f aus V und $\ell/\|\ell\|$ ist ein maximales lineares Funktional.

c) Zur Bestimmung der Minimalabweichung $d_V(f)$ kann man aufgrund des obigen Dualitätssatzes anstelle der eigentlichen Approximationsaufgabe auch das folgende *duale Approximationsproblem* lösen:

$$\text{Maximiere die Funktion } |\ell(f)| \text{ über } \ell \in V^\perp,\ \|\ell\| \le 1. \tag{2.29}$$

d) Ist $(R, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbert-Raum, so lässt sich mit Hilfe des Rieszschen Satzes das duale Approximationsproblem folgendermaßen formulieren: Maximiere $|\langle f, g\rangle|$ über $g \in R$ unter den Nebenbedingungen $\|g\| \le 1$ und $\forall\, p \in V: \ \langle g, p\rangle = 0$.

Beweis zu (2.27)

zu a) Ist $\ell \in V^\perp$, $\|\ell\| \le 1$ und $p \in V$, so folgt

$$|\ell(f)| \;=\; |\ell(f) - \ell(p)| \;=\; |\ell(f-p)| \;\le\; \|\ell\|\,\|f-p\| \;\le\; \|f-p\|,$$

und somit auch $|\ell(f)| \le d_V(f)$.

zu b) Im Fall $d_V(f) = 0$ erfüllt $\ell_f := 0$ die Behauptung. Sei also im Folgenden $d_V(f) > 0$. Wir betrachten den linearen Teilraum $U := \mathrm{Spann}(V \cup \{f\})$. Jedes $g \in U$ besitzt dann eine *eindeutige* Darstellung der Form

$$g \;=\; \alpha_g\, f \;+\; p_g, \quad \alpha_g \in \mathbb{R}, \quad p_g \in V.$$

Hiermit zeigt man nun direkt (Übungsaufgabe): Die Abbildung $\ell_0 : U \to \mathbb{R}$, $\ell_0(g) := \alpha_g\, d_V(f)$ ist ein stetiges lineares Funktional auf U mit den Eigenschaften:

$$\ell_0\big|_V \;=\; 0, \quad \|\ell_0\|_{U^*} \;=\; 1, \quad \ell_0(f) \;=\; d_V(f).$$

Die Behauptung ergibt sich hieraus nun mit Hilfe des Satzes von Hahn und Banach (2.24). □

Beispiel (2.30)

Sei $R := \mathrm{C}[a,b]$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$, $V = \mathrm{Spann}(p_0, \ldots, p_n)$, wobei die $p_j \in R$ linear unabhängig seien. Schließlich sei $f \in \mathrm{C}[a,b] \setminus V$.

Das Approximationsproblem lautet somit: Bestimme $x = (x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\|f \;-\; \sum_{j=0}^{n} x_j\, p_j\|_\infty \quad \text{minimal.}$$

Für das duale Approximationsproblem schränken wir uns auf Punktfunktionale

$$\ell(q) \;=\; \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, q(t_j), \quad q \in \mathrm{C}[a,b]$$

ein, wobei $a \le t_0 < t_1 < \ldots < t_N \le b$ ein geeignetes Gitter sei. A priori ist natürlich nicht gesichert, dass die Einschränkung auf Punktfunktionale zulässig ist. Nach (2.22)c) gilt für ein solches Funktional

$$\|\ell\| \;=\; \sum_{j=0}^{N} |\lambda_j|, \quad \ell \in V^\perp \;\Leftrightarrow\; \forall\, k = 0, 1, \ldots, n: \; \sum_{j=0}^{N} \lambda_j\, p_k(t_j) \;=\; 0.$$

Damit lautet das duale Approximationsproblem:

Man bestimme eine Unterteilung $a \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_N \leq b$ und Koeffizienten $\lambda_0, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}$, so dass

$$\Big|\sum_{j=0}^{N} \lambda_j \, f(t_j)\Big|$$

maximiert wird unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=0}^{N} |\lambda_j| \;=\; 1, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, n: \; \sum_{j=0}^{N} \lambda_j \, p_k(t_j) \;=\; 0.$$