MÜNCHENER STOCHASTIK-TAGE 1998 Sekt.-Nr.:8

Risikotheorie und Versicherungsmathematik

Sektionsleiter: H. Milbrodt, Köln

Kremer , Erhard
Universität Hamburg, Institut für Mathematische Stochastik

Neues zur Rückversicherungsmathematik

In nun ca. 15 Jahren hat der Referent eine komplette, umfangreiche mathematische Theorie für eine Klasse von verallgemeinerten Rückversicherungsverträgen entwickelt. In seinem Vortrag stellt er seine letzten Ergebnisse des WS 97/98 vor. Diese beziehen sich auf die Prämienkalkulation der Verträge. Basis für die Prämienkalkulation sind ja meist gewisse Prämienformeln. So gibt der Referent zunächst eine Prämienformel unter der Annahme unabhängiger Weibull-verteilter Schadenhöhen an und anschließend dazu eine Prämienrekursion. Danach wird eine neue Bounding-Technik erläutert, die auf den allgemeinen Fall von beliebigen i.i.d. Schadenhöhen zugeschnitten ist. Der Vortrag wird abgeschlossen durch Angabe und Diskussion von neuesten Resultaten über die Prämie bei **nicht** - notwendigerweise unabhängigen Schadenhöhen.

Kremer , Erhard
Universität Hamburg, Institut für Mathematische Stochastik

Neues zur Schadenreservierungsmathematik

Seit über 15 Jahren forscht der Referent regelmäßig auch in der Mathematik der Schadenreservierung (erste Arbeit in 1982 im Scandinavian Actuarial Journal). In seinem Forschungssemester des WS 97/98 konnte er wieder einige interessante Techniken entwickeln und zwar die

a) **Schadensreservierung mit stochastischer Diskontierung:**
Es gelang, ein neues, perfektes Hochrechnungsverfahren zu entwickeln , wobei Elemente der Finanzmathematik und Mathematischen Statistik kombiniert wurden. Im zugrundeliegenden Modell wird die stochastische Schadeninflation explizit berücksichtigt. Das praktikable Verfahren dürfte für die Versicherungspraxis von Interesse sein.

b) **Minimum-Distanz-Schadenreservierung:**
Bei dieser neuen, naheliegenden Technik werden die Ähnlichkeiten der Schadensteigerungraten der verschiedenen Anfalljahre miteinander verglichen und damit geeignete Linkratios berechnet. Bei der feinsten Variante werden Techniken der multivarianten Statistik verwendet.

Im Vortrag wird über a) und b) (soweit es die Zeit erlaubt) berichtet.

Milbrodt , Hartmut
Mathematisches Institut, Universität zu Köln

Das Risiko aus einem Personenversicherungsvertrag

Üblicherweise wird das Risiko, welches ein Personenversicherungsvertrag für ein Versicherungsunternehmen darstellt, durch die Varianz des über die gesamte Vertragslaufzeit entstehenden Verlustes gemessen. Der zentrale diesbezügliche Satz, das Hattendorff-Theorem, liefert in moderner Fassung (Ramlau-Hansen, SAJ 1988; Norberg, SAJ 1992, 1996) dreierlei:

- Eine Aufteilung der gesamten Verlustvarianz auf einzelne Versicherungsperioden (-jahre)
- Eine Aufteilung der gesamten Verlustvarianz auf die einzelnen Zustände der Police
- Explizite, rechenbare Varianzformeln.

Allerdings stellt der Satz Glattheitsforderungen an die Versicherungsvertragsparameter (Zahlungen, Verzinsung, biometrisches Risiko), die den praxisrelevanten zeitdiskreten Fall ausschließen. Für diesen existieren in der Literatur verschiedene "Elementarversionen" des Hattendorff-Theorems, die sich stärker an seiner ursprünglichen, auf Hattendorff zurückgehenden Fassung aus dem Jahre 1868 orientieren. Sie sind von erkennbar gleichartiger Struktur wie die Fassungen von Ramlau-Hansen und Norberg, aber keine Spezialfälle.

Wir berichten über eine Version des Hattendorff-Theorems, die sowohl den zeitstetigen Fall unter Glattheitsannahmen als auch den diskreten Fall umfaßt und "gemischte Modelle" ebenfalls mit abdeckt. Letzteres ist von Bedeutung, da in der Praxis administrativ gesteuerte Zustandsänderungen (Storno, Ausübung eines Wahlrechtes, ...) oft an Stichtage oder Fristen gebunden und damit diskreter Natur sind, während für biologisch gesteuerte Übergänge (Tod, Invalidisierung, ...) Glattheitsforderungen an die kumulativen Übergangsintensitäten adäquat sind. Wie bei Ramlau-Hansen und Norberg beruht der Beweis unseres Hattendorff-Theorems auf Martingalmethoden.

Abschließend wird an Hand von Beispielen gezeigt, daß die Verlustvarianz in manchen praktisch relevanten Fällen kein geeignetes Risikomaß ist.

Müller , Alfred
Institut für Wirtschaftstheorie und Operations Research, Universität Karlsruhe,

Stochastische Ordnungen und die Modellierung von Abhängigkeiten in der Risikotheorie

In den letzten Jahren hat sich gezeigt, daß die (unrealistische) Annahme der Unabhängigkeit von individuellen Risiken zu einer gefährlichen Unterschätzung des Risikos der Rückversicherung führt. Wir stellen deshalb in dieser Arbeit einige Methoden zur Modellierung von Abhängigkeiten vor. Der Einfluß der Abhängigkeiten auf den Gesamtschaden wird mit Hilfe von stochastischen Ordnungen untersucht. Insbesondere mit Hilfe der supermodularen Ordnung läßt sich das Risiko zweier Portfolios mit gleichen Randverteilungen und unterschiedlichen Abhängigkeitsstrukturen vergleichen.

Pfeifer, Dietmar
Institut für Mathematische Stochastik, Universität Hamburg

Versicherungsmathematische Anwendungen mit MAPLE

In dem Vortrag soll anhand ausgewählter Beispiele aufgezeigt werden, wie Computeralgebra-Systeme in der Versicherungsmathematik und Risikotheorie nutzbringend eingesetzt werden können; Stichworte: Lebensversicherung, Cash-Flow-Simulation, Gesamtschadenverteilung, Rückversicherung, Nullnutzen-Prämien.

Schlegel , Sabine
Abteilung Stochastik, Universität Ulm

Ruinwahrscheinlichkeiten in gestörten Risikomodellen

Wir untersuchen das asymptotische Verhalten der Ruinfunktion in gestörten und ungestörten Risikomodellen, wenn die Anfangsreserve gegen unendlich strebt. Wir charakterisieren dieses Verhalten mit Hilfe der ungestörten Ruinfunktion sowie der Tailfunktion des Supremums des Störprozesses, vorausgesetzt, daš mindestens eine dieser beiden Grösen subexponentiell ist. Das Ergebnis wird anhand einiger Beispiele sowohl für den Schadenankunftsprozeš als auch den Störprozeš illustriert.

Schmidli , Hanspeter
University of Aarhus

Stochastische Summen und Subexponentialität

Wir betrachten stochastische Summen $S = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, wobei (Y_i) iid. Zufallsvariablen und N und (Y_i) unabhängig sind. Es ist bekannt, dass, falls Y_i subexponentiell verteilt ist und N exponentielle Momente hat, S subexponentiell ist. Wir zeigen das entsprechende Resultat, falls N subexponentiell ist. Als Spezialfall betrachten wir gemischte Poissonvariablen N mit subexponentieller Mischverteilung.

Schmidt, Klaus D. **Hauptvortrag**
Lehrstuhl für Versicherungsmathematik, TU Dresden, 01062 Dresden

Methoden und Modelle zur Reservierung für Spätschäden

Für jedes Versicherungsunternehmen stellt sich am Ende eines jeden Geschäftsjahres das Problem, aus den Prämieneinnahmen eine Reserve für solche Schäden zu bilden, die noch nicht abschließend reguliert sind; diese Schäden werden als Spätschäden bezeichnet. Zur Bestimmung der Spätschadenreserve wurden zahlreiche Methoden entwickelt; gemeinsame Merkmale der meisten dieser Methoden sind die Verwendung verfügbarer Information aus der Vergangenheit, einfache Formeln und ein gewisses Maß an Plausibilität. Die Qualität von Reservierungsmethoden wurde bisher jedoch vorwiegend empirisch und nur ansatzweise theoretisch untersucht. Damit besteht ein Bedarf an stochastischen Modellen, die die Entstehung und Abwicklung von Schäden beschreiben und die Klärung der Eigenschaften verschiedener Methoden der Reservierung gestatten.

Schmidt, Volker
Abteilung Stochastik, Universität Ulm, D-89069 Ulm

Eigenschaften von Ruinwahrscheinlichkeiten im kollektiven Risikomodell

Die Idee des kollektiven Risikomodells der Schadenversicherungsmathematik besteht darin, Einzelrisiken zusammenzufassen und das Portefeuille insgesamt als Produzent von Schäden zu betrachten. Dabei wird angenommen, daß die Schäden zu zufälligen Zeitpunkten σ_n eintreten, wobei $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \ldots$, und die Höhe U_n des n-ten Schadens ebenfalls eine (positive) Zufallsgröße ist. Die Pämienrate $\beta > 0$ sei konstant. Die zeitliche Entwicklung des Portefeuilles läßt sich durch den Schadenüberschußprozeß $\{S(t), t \geq 0\}$ beschreiben, wobei $S(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} U_n - \beta t$ und $N(t) = \max\{n : \sigma_n < t\}$. Eine wichtige Kenngröße ist die Ruinwahrscheinlichkeit $\psi(u) = P(\sup_{t \geq 0} S(t) > u)$ zur Anfangsreserve u.
Im Vortrag werden qualitative und asymptotische Eigenschaften der Ruinfunktion $\psi(u)$ behandelt. Dabei wird die klassische Voraussetzung, daß die Folge $\{\sigma_n\}$ der Schadenzeitpunkte einen homogenen Poisson-Prozeß bildet, dahingehend modifiziert, daß auch andere Punktprozeß-Modelle betrachtet werden, insbesondere Markovsch-modulierte Poisson-Prozesse, Poissonsche Cluster-Prozesse bzw. Überlagerungen von Erneuerungsprozessen. Bezüglich der Schadenhöhen U_n wird vorausgesetzt, daß ihre Verteilung entweder einen exponentiellen Tail hat oder eine subexponentielle Verteilung (mit schwerem Tail) ist.

Literatur

[1] S. Asmussen, A. Frey, T. Rolski und V. Schmidt (1995) *Does Markov-modulation increase the risk?* ASTIN Bulletin 25, 49–66.
[2] S. Asmussen, H. Schmidli und V. Schmidt (1997) *Tail probabilities for non-standard risk and queueing processes with subexponential jumps.* Preprint. Universitäten Aarhus, Lund und Ulm.
[3] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt und J.L. Teugels (1998) *Stochastic Processes for Insurance and Finance.* J. Wiley & Sons, Chichester (in Vorbereitung).